Tema 9. Geometría plana

1. Conceptos básicos de geometría

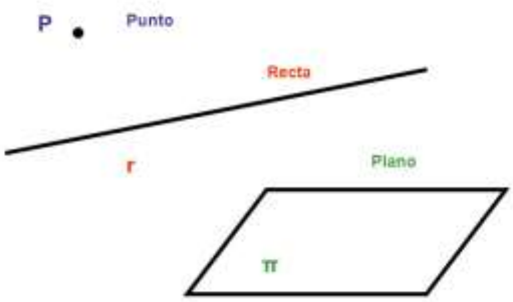
La geometría se basa en tres elementos claves:

- **PUNTO:** Objeto geométrico que no tiene dimensión y que se utiliza para indicar una ubicación. Se nombran con letras mayúsculas “A”, “B”, etc.
- **LÍNEA:** Es una sucesión ininterrumpida de infinitos puntos. Las líneas pueden ser rectas o curvas. Se nombran con letras minúsculas “r”, “s”, etc...

Las líneas rectas pueden aparecer representadas de las siguientes formas:

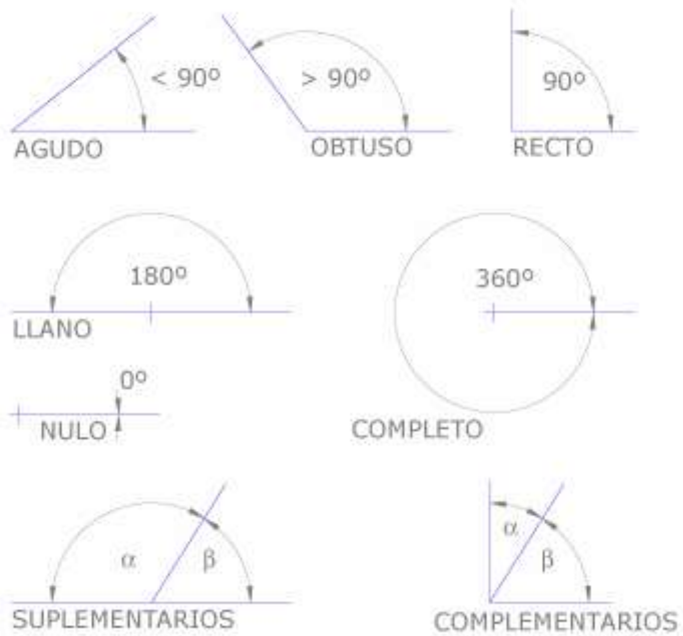
  - ***Recta***: Es una sucesión ininterrumpida de infinitos puntos en una sola dimensión, suele aparecer representada como un fragmento de ella, aunque no tendría ni principio ni fin.
  - ***Semirrecta***: Es una recta que tiene un punto de inicio.
  - ***Segmento***: Es una porción de recta comprendida entre dos puntos.

- **PLANO:** Es un espacio geométrico, que posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas. Se nombran con letras griegas “μ”, “ß”, etc...



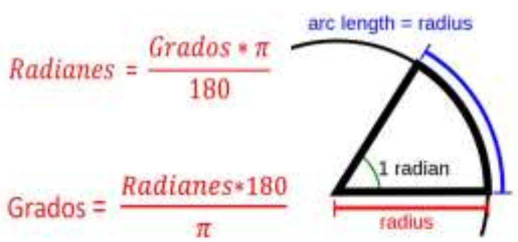
1.1. Ángulos

Un ángulo es la porción de plano que queda entre dos semirrectas coincidentes en un punto llamado vértice. Pueden ser:



El grado: Es una unidad de medida de ángulos cuyo símbolo es º. Hay 360º en una revolución completa.

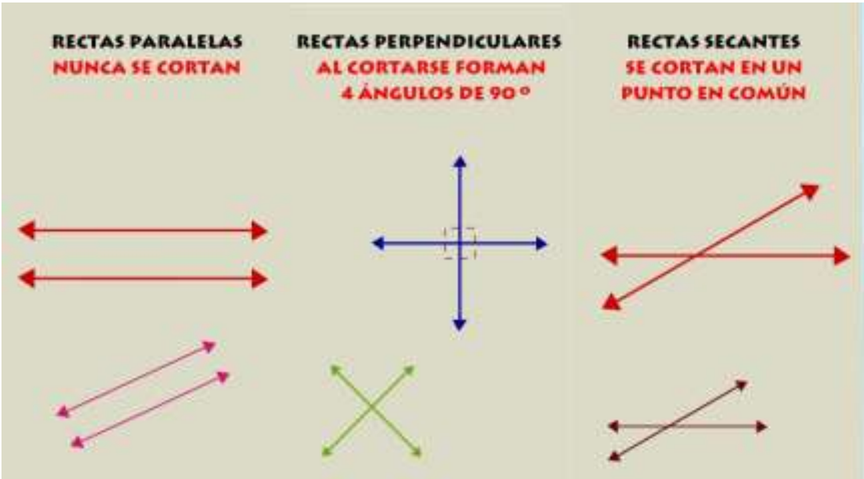
El radián: Es la unidad de medida angular en el sistema internacional de medidas, una revolución completa tiene 2π radianes.



Grados	Radianes
360°	2π rad
180°	π rad
90°	π /2 rad
60°	π /3 rad
45°	π /4 rad
30°	π /6 rad
57,3°	1 rad

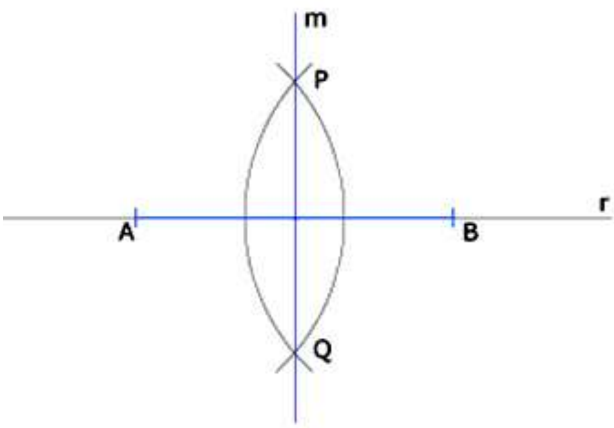
1.2. Relaciones entre rectas

- **RECTAS SECANTES**: Son aquellas que se cortan en un punto.
- **RECTAS PERPENDICULARES:** Son aquellas secantes que al cortarse forman un ángulo de 90º, también llamado ángulo recto.
- **RECTAS PARALELAS:** Son aquellas que no tienen ningún punto en común aunque las alarguemos.
- **RECTAS COINCIDENTES**: Son aquellas que tienen todos sus puntos en común.

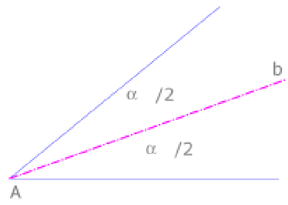


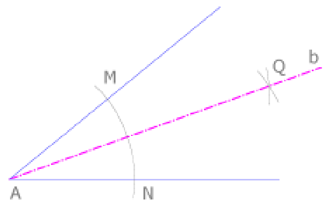
1.3. Construcciones geométricas sencillas

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO: Es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Para trazar la mediatriz de un segmento AB dibujamos dos puntos P y Q que equidisten de los extremos A y B del segmento. Para ello trazamos dos arcos con igual radio y centros en A y B. Su intersección son los puntos P y Q. La mediatriz m es la recta PQ.



BISECTRIZ DE UN ÁNGULO: Es la recta que divide un ángulo en dos partes iguales. Para trazar una bisectriz se dibuja un arco de radio arbitrario con centro en el vértice. Este arco corta a los lados en los puntos **M** y **N**. La bisectriz b es la mediatriz de la cuerda **MN**.

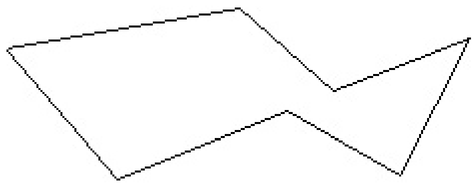




2. Polígonos

2.1. Introducción

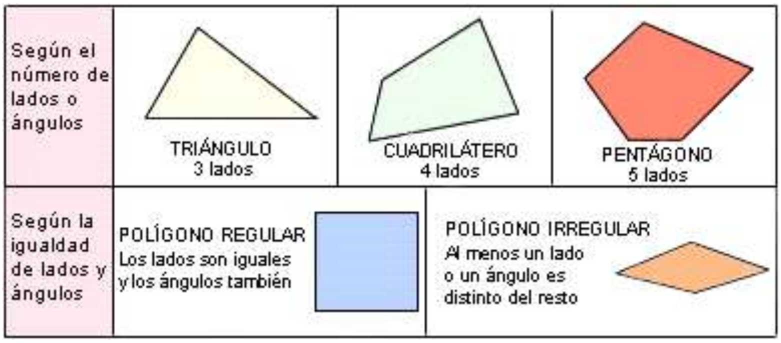
Si realizamos varias rectas consecutivas en diferentes direcciones con puntos en común entre ellas, se denomina línea poligonal. Un polígono es una línea poligonal cerrada, por ejemplo:



Los elementos de un polígono son:

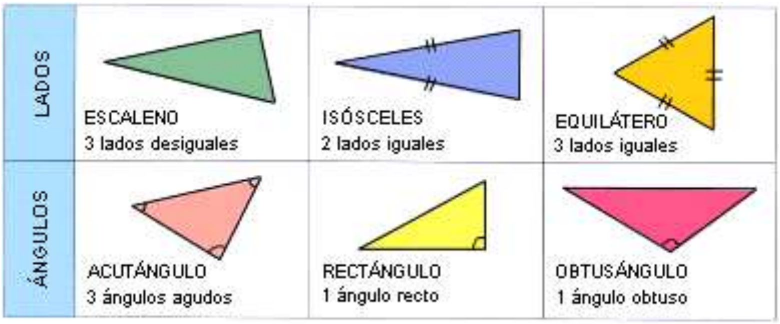
- **Lados:** Son los segmentos que limitan el polígono.
- **Vértices:** Son los puntos donde concurren los lados.
- **Ángulos:** Son las regiones del plano que forman los lados al concurrir.
- **Diagonales:** Son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.
- **Perímetro:** Es la suma de las longitudes de los lados.

Los polígonos se pueden construir a partir de tres lados, sin límite de ellos. Pueden clasificarse de formas muy diversas:



2.2. Estudio de los triángulos

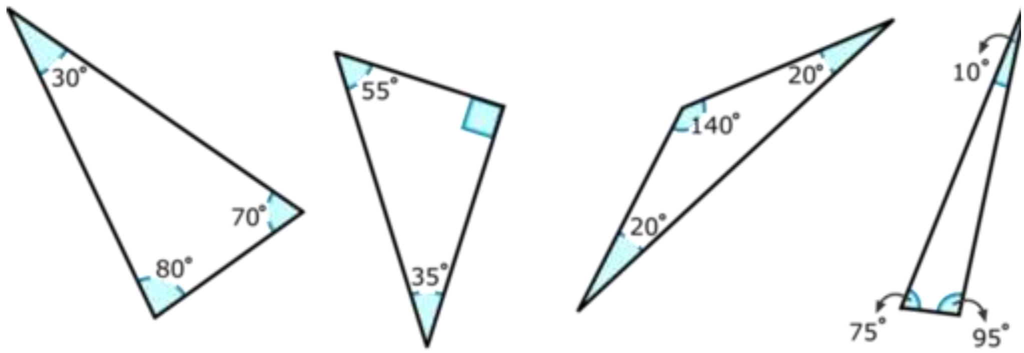
El **triángulo** es el polígono más simple, tiene **tres lados** y **tres ángulos**. Si observas a tu alrededor comprobarás que más objetos de los que imaginabas tienen forma de triángulo. Podemos clasificar los triángulos por la medida de sus lados o por la de sus ángulos:



Estas dos clasificaciones no son excluyentes, es decir, que un triángulo puede ser a la vez acutángulo e isósceles; o puede ser escaleno y a la vez obtusángulo, etc.

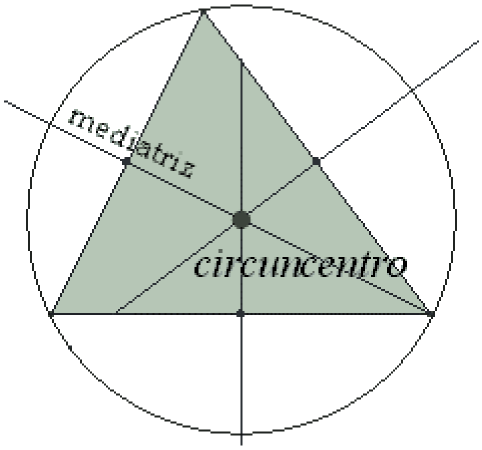
2.2.1. Propiedades y relaciones en los triángulos

<u>1º. La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180º</u>

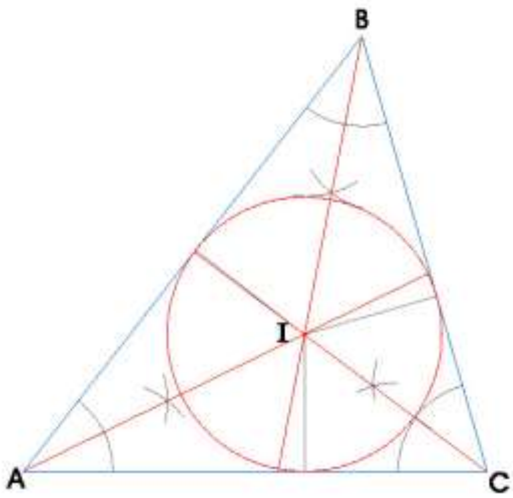


2º Puntos notables en los triángulos.

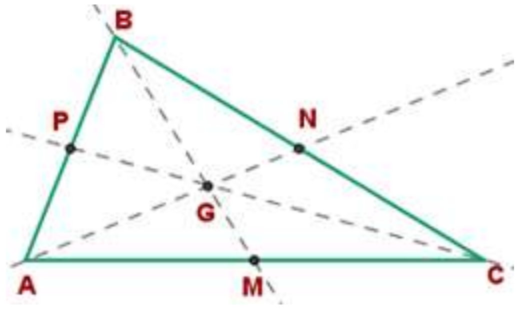
a) Circuncentro: El punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo. Este punto **equidista** de los **vértices** del triángulo. Es el **centro** de una circunferencia que pasa por los tres vértices llamada **circunferencia circunscrita**.



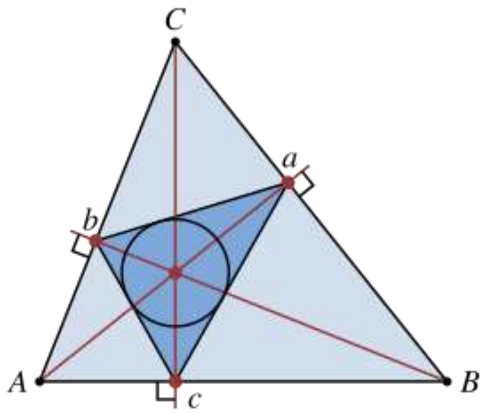
b) Incentro: El punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo. Este punto **equidista** de los **lados** del triángulo. Es el **centro** de una circunferencia tangente a los tres lados llamada **circunferencia inscrita.**



c) Baricentro o centro de gravedad: El punto donde se cortan las tres medianas. La mediana une el punto medio de un lado con el vértice opuesto a ese lado.



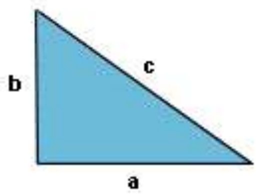
d) Ortocentro: El punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo. Las alturas se dibujan trazando una línea perpendicular (esto es, con un ángulo de 90 grados) que pase por uno de los lados del triángulo de forma que pase por el vértice opuesto. En la figura siguiente podemos ver un ejemplo:



3º Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos (que son los lados que forman el ángulo recto) es igual al cuadrado de la hipotenusa (que es el lado más largo).

$$a^2 + b^2 = c^2$$



De este modo en cualquier triángulo rectángulo podemos calcular el tercer lado conociendo los otros dos.

Ejemplo 1 (Conociendo dos catetos, calculamos la hipotenusa): Supongamos que un cateto mide 3 cm y el otro 4 cm, ¿Cuánto medirá la hipotenusa?

$3^2 + 4^2 = h^2$ $\quad$ $9 + 16 = h^2$ $\quad$ $25 = h^2$ $\quad$ $h = \sqrt{25} = 5$ cm

Ejemplo 2 (Conociendo un cateto y la hipotenusa, calculamos el otro cateto): Supongamos que un cateto mide 5 cm y la hipotenusa 8 cm, ¿Cuánto medirá el otro cateto?

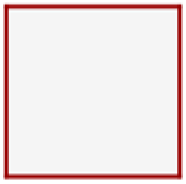
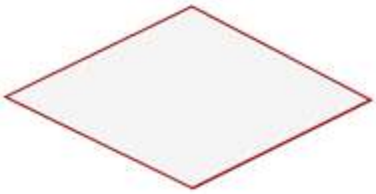
$5^2 + c^2 = 8^2$ $\quad$ $25 + c^2 = 64$ $\quad$ $c^2 = 64 – 25$ $\quad$ $c^2 = 39$

$c = \sqrt{39} = 6'24$ cm

2.3. Estudio de los cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados y cuatro ángulos. Los lados de un cuadrilátero pueden ser: consecutivos u opuestos, según que tengan un vértice común o no. De acuerdo a la igualdad o al paralelismo de sus lados, podemos clasificarlos en:

a) Paralelogramos: Cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos.

Cuadrado		**Tiene los 4 lados iguales y los 4 ángulos rectos.**
Rectángulo		**Tiene lados iguales dos a dos y los 4 ángulos rectos.**
Rombo		**Tiene los cuatro lados iguales.**
Romboide		**Tiene lados iguales dos a dos.**

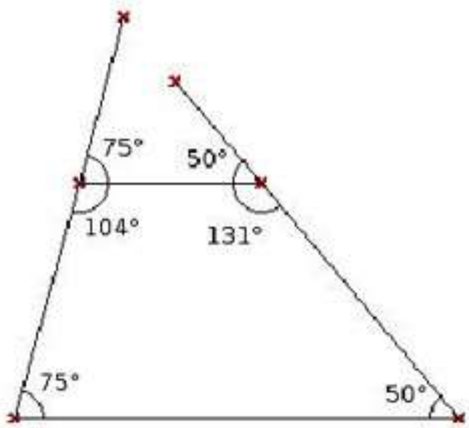
b) Trapecios: Cuadriláteros que tienen dos lados paralelos, llamados base mayor y base menor.

Se clasifican en:

Trapecio rectángulo		**Tiene un ángulo recto.**
Trapecio isósceles		**Tiene dos lados no paralelos iguales.**
Trapecio escaleno		**No tiene ningún lado igual ni ángulo recto.**
Trapezoides		**Cuadriláteros que no tiene ningún lado igual ni paralelo.**

2.3.1. Propiedades y relaciones en los cuadriláteros

<u>1º La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360º.</u>



2º Las principales características de los paralelogramos son:

- **Lados paralelos dos a dos.**
- **Lados iguales dos a dos.**
- **Las diagonales se cortan en sus punto medio.**
- **Los ángulos opuestos son iguales.**
- **Los ángulos consecutivos son suplementarios (suman 180º).**

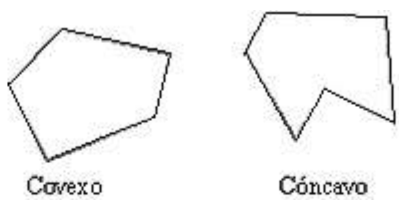
2.4. Polígonos regulares

Un polígono se considera regular cuando tiene todos sus lados y ángulos iguales, y por tanto puede ser inscrito y circunscrito en una circunferencia. El centro de dicha circunferencia se denomina centro del polígono, y equidista de los vértices y lados del mismo.

Se denomina ángulo central de un polígono regular el que tiene como vértice el centro del polígono, y sus lados pasan por dos vértices consecutivos. Su valor en grados resulta de dividir 360º entre el número de lados del polígono (ver figura).

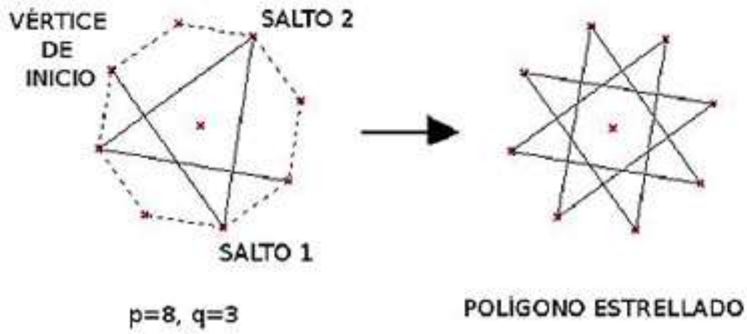
Se denomina ángulo interior, al formado por dos lados consecutivos. Su valor es igual a la mitad del central abarcado por los lados del ángulo por ser inscrito en una circunferencia.

Diremos que un polígono es convexo cuando todos los ángulos interiores miden menos de 180º, esto significa que todos los vértices 'apuntan' al exterior. Un polígono que no es convexo se denomina cóncavo. En la figura siguiente vemos un ejemplo de cada tipo:

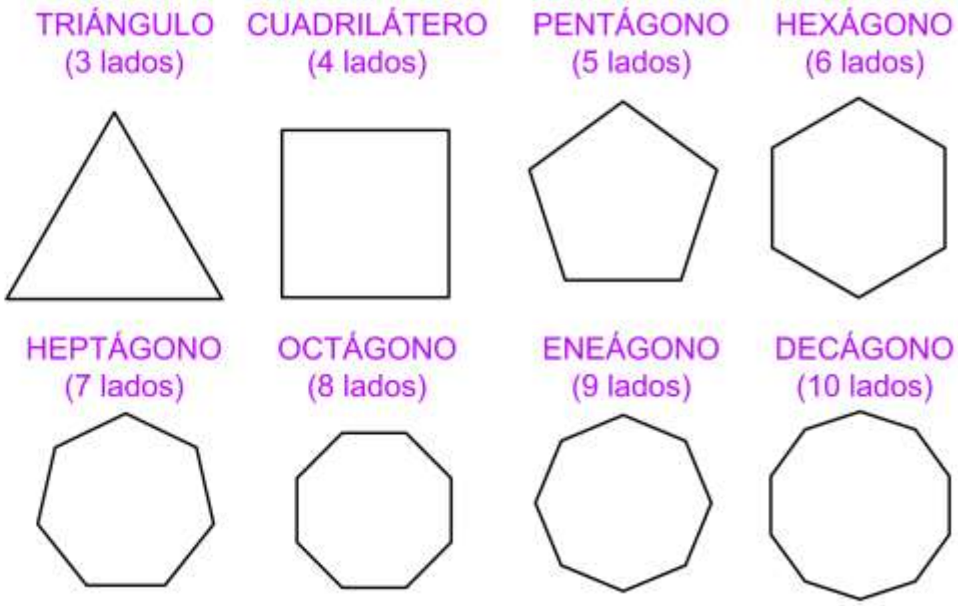


Covexo Cóncavo

Dado un polígono regular de *p* lados, si unimos un vértice con otro no consecutivo, avanzando *q* vértices, y si al repetir este proceso alcanzamos el vértice inicial, obtenemos un polígono regular estrellado:

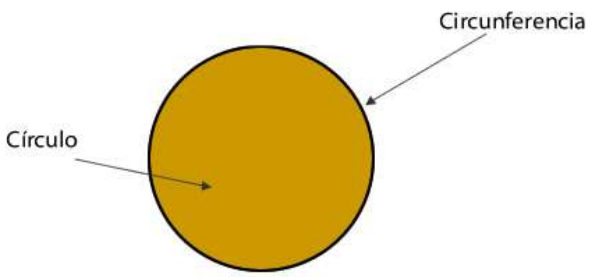


Los cuatro polígonos regulares, mayores de cuatro lados, más básicos, son el pentágono, hexágono, heptágono y octógono.



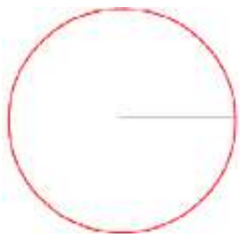
3. Circunferencia y círculo

La **circunferencia** es una línea curva cerrada, cuyos puntos tienen la propiedad de equidistar de otro punto llamado centro. El término equidistar significa que están a la misma distancia. Los puntos de la circunferencia y los que se encuentran dentro de ella forman una superficie llamada **círculo**.

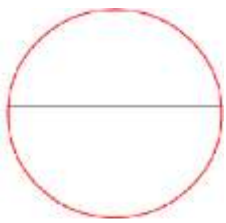


3.1. Principales elementos de la circunferencia

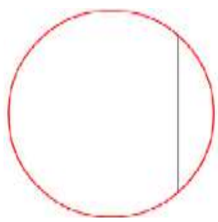
Radio: Es el segmento que une el punto centro con cualquier punto de la circunferencia. El radio permite nombrar a la circunferencia y lo identificamos con la letra **r**.



Diámetro: Segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el punto centro. El diámetro equivale a la medida de dos radios.



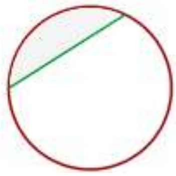
Cuerda: Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.



Arco: Es una parte o subconjunto de la circunferencia, limitada por dos puntos de ella.

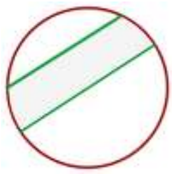
3.2. Elementos del círculo

Segmento circular: Porción de círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente.

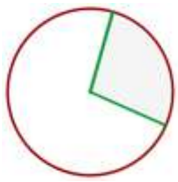


Semicírculo: Porción del círculo limitada por un diámetro y el arco correspondiente**.** Equivale a la mitad del círculo.

Zona circular: Porción de círculo limitada por dos cuerdas.



Sector circular: Porción de círculo limitada por dos radios.

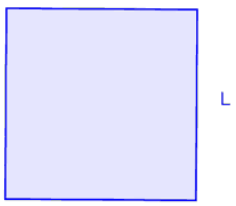


Corona circular: Porción de círculo limitada por dos círculos concéntricos.

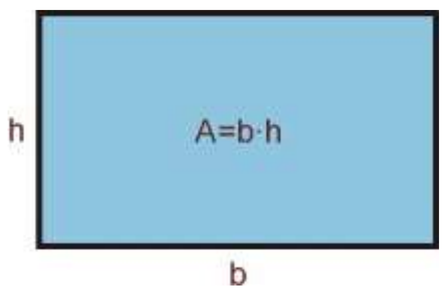
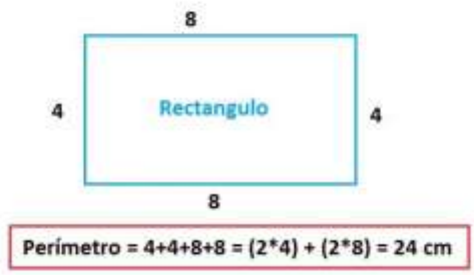
Trapecio circular: Porción de círculo limitada por dos radios y una corona circular.

3. Áreas y perímetros de figuras planas

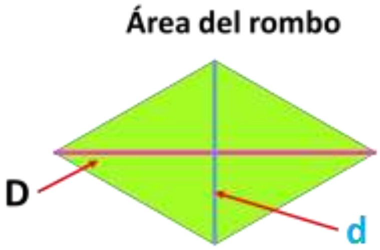
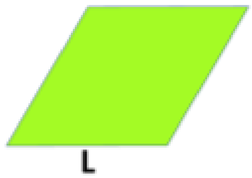
Cuadrado

ÁREA	PERÍMETRO
Se calcula elevando al cuadrado la longitud de uno de los lados  $A = L \times L = L^2$ Si L = 4 cm, entonces A = 4^2 = 16 cm^2	Es la suma de todos los lados 

Rectángulo

ÁREA	PERÍMETRO
Se calcula multiplicando las longitudes de dos lados distintos.  Si h = 3 cm y b = 5cm, entonces A = 3·5 = 15cm^2	Es la suma de todos los lados 

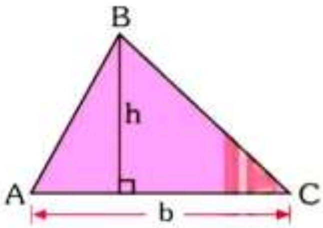
Rombo

ÁREA	PERÍMETRO
Se calcula multiplicando la diagonal mayor D por la diagonal menor d y se divide entre 2.  $Á = \frac{D \times d}{2}$ Si D = 3 cm y d = 2 cm, entonces A = 3·2/2 = 3cm^2	Es la suma de todos los lados  P = L + L + L + L o P = 4L

Triángulos

Área del triángulo

El área de la región de un **triángulo** es igual a la mitad del producto de su base y de su altura.



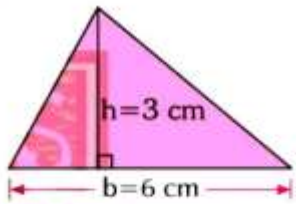
$$\text{Área } \triangle = \frac{b \times h}{2}$$

b: base
h: altura

Ejemplo:

Encuentra el área de la región de un triángulo, si su base mide 6 cm y su altura mide 3 cm.

Resolución:



$$\text{Área } \triangle = \frac{b \times h}{2}$$

Reemplazando: b = 6 cm
h = 3 cm

$$\text{Área } \triangle = \frac{6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2}$$

$$\therefore \boxed{\text{Área } \triangle = 9 \text{ cm}^2}$$

El perímetro será la suma también de todos los lados.

Polígonos regulares

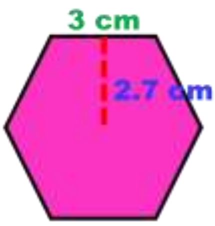
Un polígono se considera regular cuando tiene todos sus lados y ángulos iguales. Aquí estarían el pentágono (5 lados), hexágono (6 lados), heptágono (7 lados), octógono (8 lados), etc.

El perímetro se calcula como la suma de todos los lados, igual que en los cuadriláteros, y el área se calcula con esta fórmula:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Donde apotema es la longitud desde la mitad de un lado hasta el centro de la figura.

$$\text{Área del polígono} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2}$$



perímetro = n x l

P = 6 x 3 = 18

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2}$$

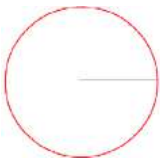
$$\text{Á} = \frac{p \times a}{2}$$

$$\text{Á} = \frac{18 \times 2.7}{2} = \frac{48.6}{2}$$

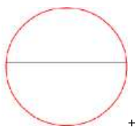
$$\text{Á} = 24.3 \text{ cm}^2$$

Circunferencia y círculo

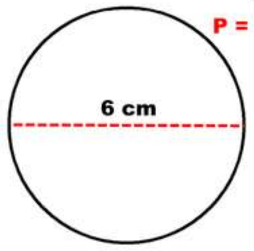
El **radio de la circunferencia** es el segmento que une el punto centro con cualquier punto de la circunferencia. El radio permite nombrar a la circunferencia y lo identificamos con la letra **r**.



El **diámetro** es el segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el punto centro. El diámetro equivale a la medida de dos radios.



Ejemplo



Perímetro

$P = \pi \times d$

$P = 3.1416 \times 6$

$P = 18.8496$ cm

$P = 2\pi \times r$

$P = 2(3.1416) \times 3$

$P = 6.2832 \times 3$

$P = 18.8496$ cm

Área

$A = \pi \times r^2$

$A = 3.1416 \times 3^2$

$A = 3.1416 \times 9$

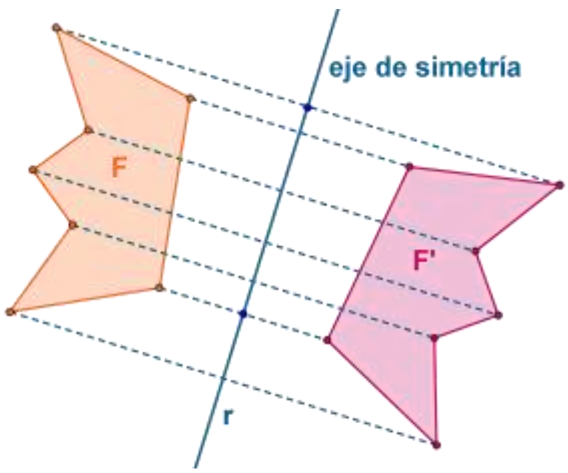
$A = 28.2744$ cm²

4. Simetrías en figuras planas

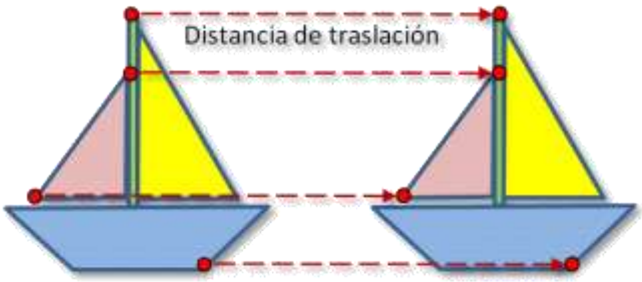
La simetría es un concepto sencillo al que podemos llegar observando el mundo que nos rodea. Mirando la naturaleza, nuestro cuerpo, los reflejos de las cosas, las formas vivas y las creaciones artísticas, pronto descubrimos unos principios de repetición.

Los tipos de simetría más comunes son:

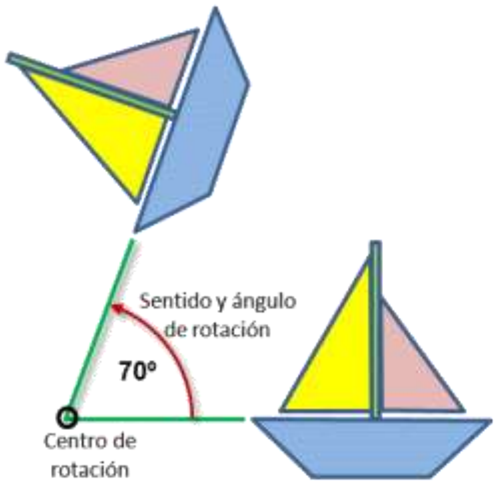
Simetría axial: Consiste en trazar un eje y hacer corresponder a cada punto otro situado idénticamente al primero respecto a esa recta. Es la simetría más fácilmente reconocible, la observamos al mirar a través de un espejo.



Simetría de traslación: Todos los puntos se mueven en una dirección determinada y a una distancia fija, marcada por un eje de simetría. Todo se conserva, menos la posición.



Simetría de rotación: Todos los puntos se desplazan, según un arco de circunferencia, respecto a un eje o un punto denominado centro de simetría.



EJERCICIOS

1. **Calcula área y perímetro de:**

   a) **Un cuadrado de lado 7 cm**

   b) **Un cuadrado cuya diagonal mide 6 cm**

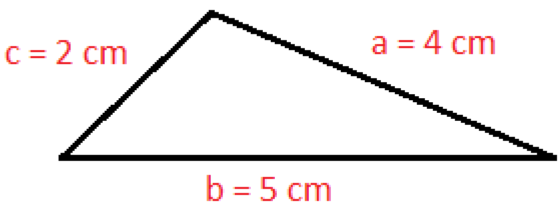
   c) **Un rectángulo de base 3 cm y altura 12 cm**

   d) **Un rectángulo de altura 2 cm y con una diagonal de 8 cm**

   e) **Un triángulo equilátero cuyos lados miden 4 cm**

   f) **Un triángulo isósceles cuyo lado mayor es de 5 cm y cuyo lado menor es de 3 cm**

   g) **El siguiente triángulo escaleno**



   h) **Un hexágono de lado = 5 cm**

   i) **Un rombo con diagonal mayor de 6 cm y diagonal menor de 2 cm**

   j) **Una circunferencia de radio 3 cm**

   k) **Una circunferencia de diámetro 8 metros**

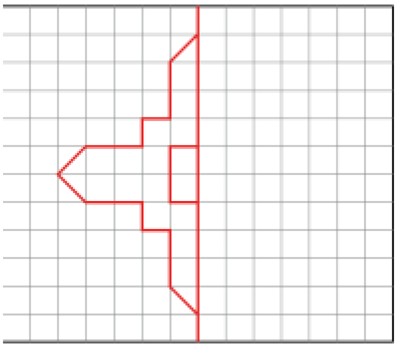
2. **¿Qué tipos de simetrías encuentras en las siguientes figuras?**

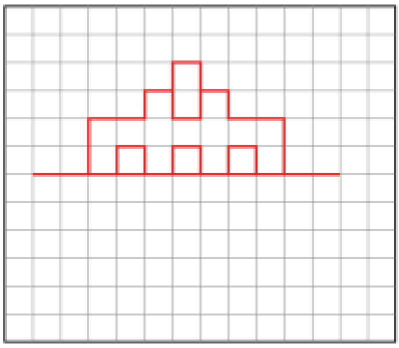
a)  **b)**  **c)** 

d) 

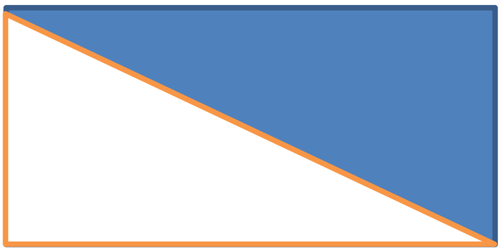
e) 

3. Completa las siguientes figuras siguiendo los principios de la simetría axial





4. Calcula el área sombreada de la siguiente figura, teniendo en cuenta que el rectángulo mide 4 m de alto y 8 de largo, y la base del triángulo mide 6



5. Calcula el área sombreada de la siguiente figura, teniendo en cuenta que el rectángulo mide 3m de alto y 8 de largo, y el radio de la circunferencia es 1,5m