

Tema 9. Geometría del espacio

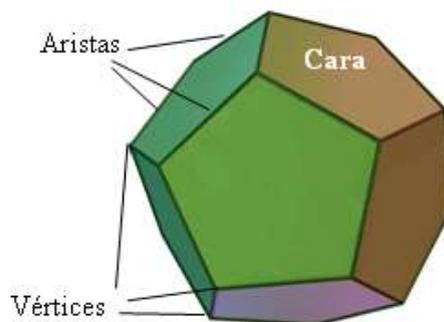
1. Poliedros y cuerpos de revolución

Los poliedros son cuerpos geométricos tridimensionales que se forman a partir de polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos,...)

Los poliedros tienen elementos comunes, algunos de los cuales son:

- **Cara:** cada uno de los polígonos que forman o limitan un poliedro.
- **Arista:** segmento formado por la intersección de dos caras de un poliedro.
- **Vértice:** punto de intersección de dos o más aristas de un poliedro.

En la siguiente imagen podemos ver estos elementos sobre un poliedro regular formado por doce caras pentagonales, un dodecaedro.



A parte de los elementos que aparecen en el dibujo están los vértices que son los puntos donde se cortan las aristas.

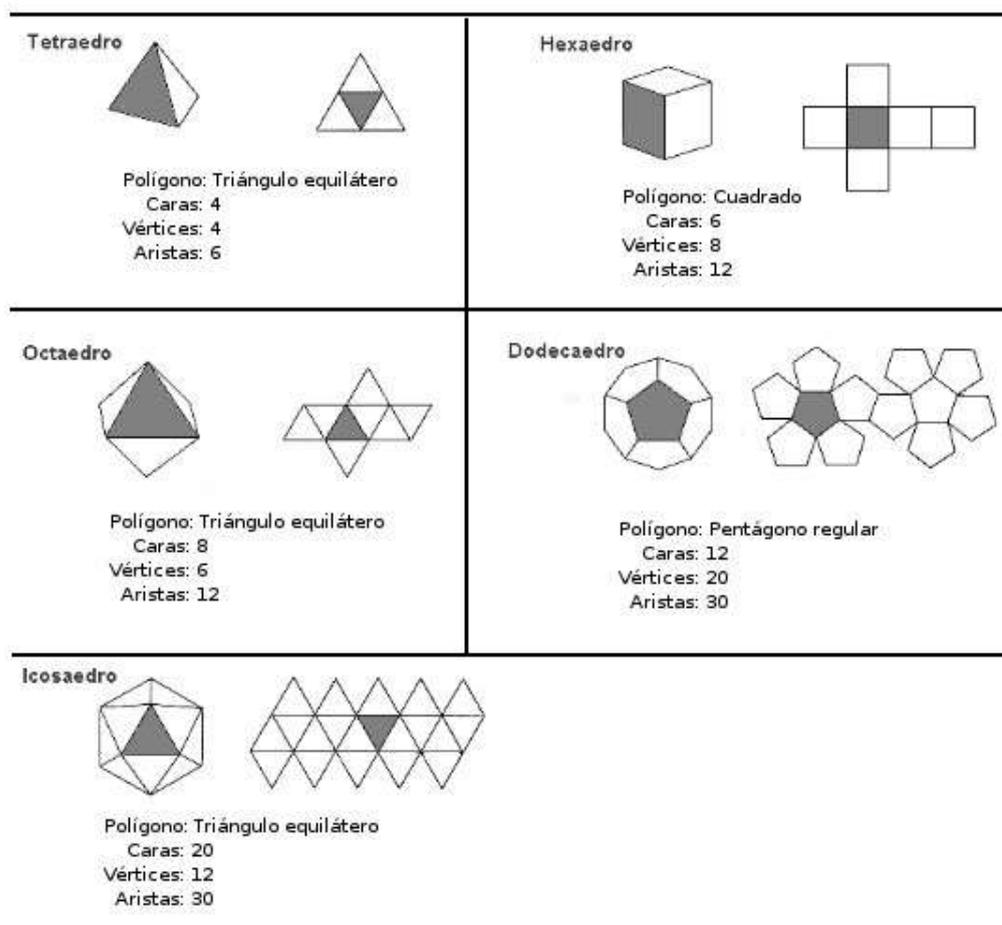
Los elementos de un poliedro convexo cumplen una propiedad curiosa que relaciona el número de caras, el de vértices y el de aristas. Es conocido como la fórmula de Euler y dice que:

El número de caras más el número de vértices es igual al número de arista más dos:

$$C + V = A + 2$$

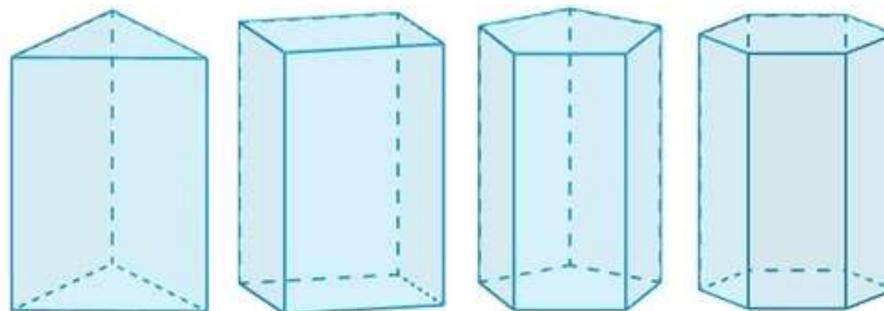
1.1. Poliedros regulares

Dentro de todos los poliedros que existen hay unos pocos, concretamente cinco, que se les conoce como poliedros regulares o sólidos platónicos. Estos poliedros tienen una propiedad especial y es que todas sus caras están formadas por polígonos regulares iguales. Debido a esta propiedad sólo cinco son los cuerpos geométricos que la cumplen: el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. En la imagen siguiente podemos observar estas figuras junto a su desarrollo plano:



1.2. Prisma

Otro tipo de poliedros son los prismas, estos tienen las características especiales de que sus bases son polígonos regulares iguales y las caras laterales son rectángulos. El nombre de los prismas depende del polígono regular de la base:



Prisma triangular Prisma rectangular Prisma pentagonal Prisma hexagonal

Para calcular el área y volumen de cualquier prisma, solo hay que tener en cuenta lo siguiente:

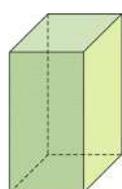
- Para calcular el área de un prisma, basta con sumar el área de cada una de sus caras
- Para calcular el volumen de un prisma, basta con multiplicar el área de la base por la altura del prisma.

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

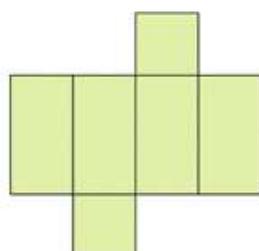
A continuación puedes ver unos ejemplos:

EJEMPLO 1. Calcula el área y volumen de un prisma cuadrangular de lado de base 3 cm y altura del prisma 5 cm.

Un prisma cuadrangular es la siguiente figura:



Las bases son cuadrados (por eso se llama cuadrangular), y las caras laterales cuatro rectángulos. Este es el desarrollo plano de las caras de la figura:



Para calcular el área, calculamos el área del cuadrado de una base (las dos son iguales), y el de un rectángulo (cara lateral), dado que son los cuatro iguales. El lado del cuadrado es un dato del ejercicio (3 en este caso). El rectángulo tiene como lados el lado del cuadrado (3) y la altura del prisma (5).

$$A_{\text{cuadrado}} = l^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total consiste en sumar dos veces el área del cuadrado y cuatro veces la del rectángulo:

$$A_{\text{Total}} = 9 + 9 + 15 + 15 + 15 + 15 = 78 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen, hay que aplicar la fórmula $V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$. Estos datos los tenemos ya; el área de la base es el área del cuadrado (calculada en el paso anterior), en este caso, ya que el cuadrado es la base de esta figura, y la altura es un dato que da el enunciado.

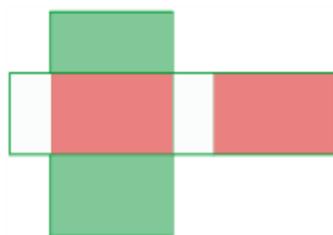
$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = A_{\text{cuadrado}} \cdot \text{altura} = 9 \cdot 5 = 45 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO 2. Calcula el área y volumen de un prisma rectangular de lados de base 3 y 5 cm y altura del prisma 10 cm.

Un prisma rectangular es parecido al anterior, pero las bases son rectángulos. Es la siguiente figura:



Las bases son rectángulos (por eso se llama rectangular), y las caras laterales también son cuatro rectángulos. Pero en este caso, las caras laterales no son iguales, sino que hay dos más grandes y dos más pequeñas. Piensa en un paquete de tabaco o un brick de leche, que tienen esta forma. Las caras delantera y trasera son rectángulos más grandes que las caras laterales. Este es el desarrollo plano de las caras de la figura:



Para calcular el área, calculamos el área del rectángulo de una base (las dos son iguales), el de un rectángulo lateral grande (por ejemplo, la parte delantera de un paquete de tabaco), y el de un rectángulo lateral pequeño (un lado del paquete de tabaco). Los lados de la base son dos datos del ejercicio (3 y 5 en este caso). El rectángulo lateral más pequeño tiene como lados el lado pequeño del rectángulo de base (3) y la altura del prisma (10), y el rectángulo lateral más grande tiene como lados el lado grande del rectángulo de base (5) y la altura del prisma (10).

$$A_{\text{base}} = b \cdot h = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{rectángulo_lateral_grande}} = b \cdot h = 5 \cdot 10 = 50 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{rectángulo_lateral_pequeño}} = b \cdot h = 3 \cdot 10 = 30 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total consiste en sumar dos veces el área de la base, y dos la de cada rectángulo lateral.

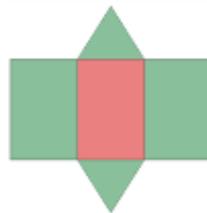
$$A_{\text{Total}} = 15 + 15 + 50 + 50 + 30 + 30 = 190 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen, hay que aplicar la fórmula $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$. Estos datos los tenemos ya; el área de la base es el área del cuadrado (calculada en el paso anterior), en este caso, ya que el cuadrado es la base de esta figura, y la altura es un dato que da el enunciado.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = 15 \cdot 10 = 150 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO 3. Calcula el área y volumen de un *prisma triangular* donde la base es un triángulo equilátero de lado 3 y altura del prisma 10 cm.

Un prisma triangular (equilátero) tiene la siguiente forma y desarrollo plano.



Las bases son triángulos, y las caras laterales son tres rectángulos iguales.

Para calcular el área, hay que calcular el área del triángulo, pero nos hace falta calcular la altura del triángulo con el teorema de Pitágoras, dividiendo el triángulo en dos.

- La hipotenusa siempre será un lado del triángulo (3 en este caso)
- Un cateto será la altura que buscamos
- El otro cateto siempre será la mitad del lado del triángulo (1,5 en este caso)

$$\text{Aplicando Pitágoras. } 3^2 = h^2 + (1,5)^2$$

$$9 = h^2 + 2,25$$

$$9 - 2,25 = h^2$$

$$6,75 = h^2$$

$$h = \sqrt{6,75} = 2,6$$

Por tanto, el área de la base es el área del triángulo, donde la base es un lado (3) y la altura la calculada por el teorema de Pitágoras (2,6)

$$A_{\text{base}} = \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 3,9 \text{ cm}^2$$

El área del rectángulo es el producto del lado del triángulo por la altura del prisma.

$$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 10 = 30 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total consiste en sumar dos veces el área de la base, y tres la de cada rectángulo lateral.

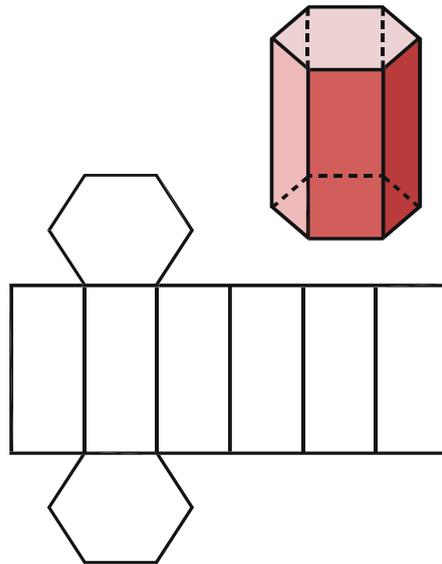
$$A_{\text{Total}} = 3,9 + 3,9 + 30 + 30 + 30 = 97,8 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen, hay que aplicar la fórmula $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$. Estos datos los tenemos ya, por tanto

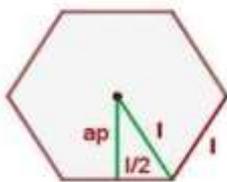
$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = 3,9 \cdot 10 = 39 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO 4. Calcula el área y volumen de un prisma hexagonal de lado 6 cm y altura 10 cm.

En un prisma hexagonal, las bases son hexágonos. El desarrollo plano será el siguiente, donde hay una cara lateral por cada lado del hexágono, es decir, seis, y son rectangulares.



Para calcular el área del hexágono, hace falta su apotema. Se cumple que en un hexágono regular, la distancia del centro a uno de los vértices coincide con el lado, por lo que para calcular la apotema hay que aplicar el teorema de Pitágoras cogiendo como hipotenusa la longitud del lado (en este caso 6), y como un cateto la mitad de la longitud del lado (en este caso la mitad de 6, o sea 3). El otro cateto será la apotema.



$$3^2 + ap^2 = 6^2$$

$$9 + ap^2 = 36$$

$$ap^2 = 36 - 9$$

$$ap^2 = 27$$

$$ap = \sqrt{27} = 5,2 \text{ cm}$$

Ahora ya podemos calcular el área del hexágono:

$$\text{Perímetro} = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$$

$$A_{\text{hex}} = (\text{perímetro} \cdot \text{apotema}) / 2 = (36 \cdot 5,2) / 2 = 93,6 \text{ cm}^2$$

Las caras laterales son rectángulos en los que un lado es el lado del hexágono y otro es la altura del prisma, por tanto las áreas de los rectángulos son:

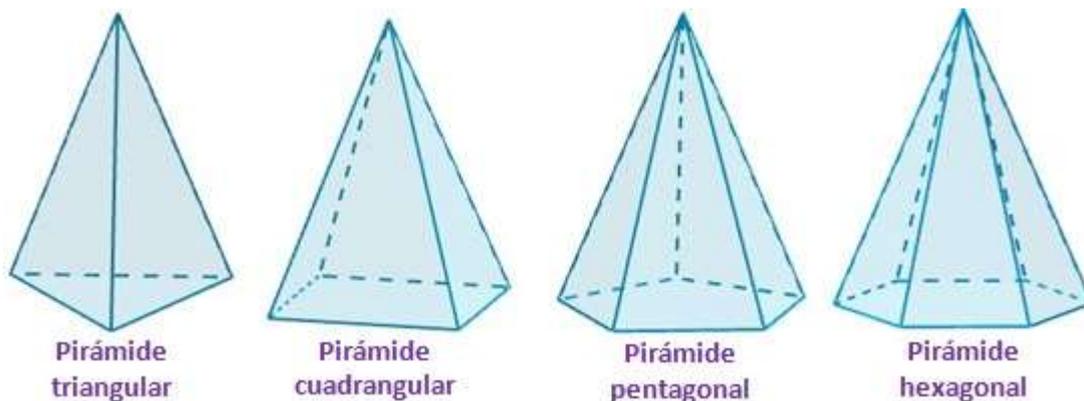
$$A_{\text{rec}} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$$

Y por tanto, el área del prisma será seis veces el área del rectángulo más dos veces el área del hexágono, puesto que hay dos bases hexagonales y seis caras laterales rectangulares

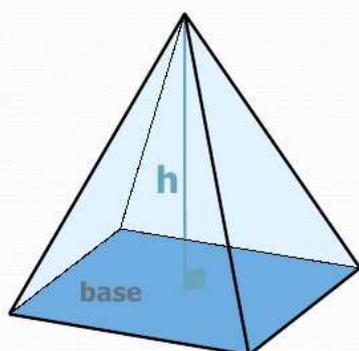
$$A_{\text{prisma}} = 2 \cdot A_{\text{hex}} + 6 \cdot A_{\text{rec}} = 2 \cdot 93,6 + 6 \cdot 60 = 547,2 \text{ cm}^2$$

1.3. Pirámides

Las pirámides están formadas por un cara (la base) que es un polígono regular y caras laterales que son triángulos que se unen en un vértice. A la hora de llamar a las pirámides el nombre varía dependiendo del polígono regular que tienen por base.

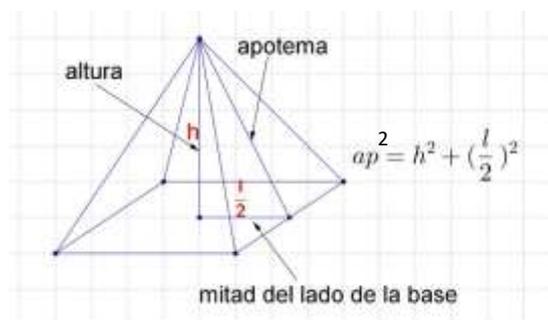


- Para calcular el área de una pirámide, basta con sumar el área de cada una de sus caras
- Para calcular el volumen de una pirámide, basta con multiplicar el área de la base por la altura de la pirámide y dividir el resultado entre 3. La altura de la pirámide es la distancia desde el vértice superior al centro de la base, como se ve en la siguiente figura:



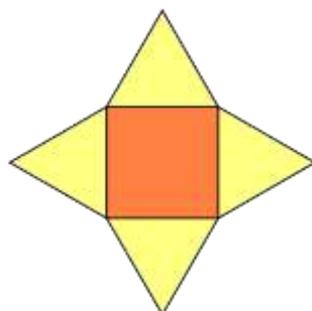
$$V = \frac{A_{\text{base}} \times h}{3}$$

Para calcular el área de una de las caras laterales, hace falta la altura del triángulo, que se llama apotema (no confundir con la altura de la pirámide). Aplicando el teorema de Pitágoras en una pirámide cuadrangular, se puede apreciar que la apotema al cuadrado es igual a la altura de la pirámide al cuadrado más la mitad del lado de la base al cuadrado.



EJEMPLO. Calcula el área y volumen de un pirámide cuadrangular donde el lado de la base mide 4cm y la altura de la pirámide es 6 cm.

A continuación puedes ver el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular. La base es un cuadrado y las caras laterales son cuatro triángulos.



Para calcular el área total, hay que calcular el área del cuadrado y sumarle la del triángulo, que habrá que multiplicar por cuatro al haber cuatro triángulos.

$$A_{\text{cuadrado}} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del triángulo, hace falta calcular la altura del mismo, es decir, la apotema, utilizando el teorema de Pitágoras.

$$ap^2 = h^2 + (l/2)^2$$

$$ap^2 = 6^2 + (4/2)^2$$

$$ap^2 = 36 + 2^2$$

$$ap^2 = 36 + 4$$

$$ap^2 = 40$$

$$ap = \sqrt{40} = 6'32$$

Una vez calculada la apotema, que es la altura del triángulo, calculamos el área del triángulo, que será la base (que coincide con el lado del cuadrado) por la altura del triángulo (que es la apotema) partido por 2.

$$A_{\text{triángulo}} = 4 \cdot 6'32 / 2 = 12'64 \text{ cm}^2$$

El área total será la suma del área del cuadrado y cuatro veces la del triángulo:

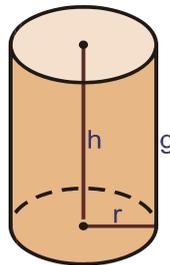
$$A_{\text{total}} = A_{\text{cuadrado}} + 4 \cdot A_{\text{triángulo}} = 16 + 4 \cdot 12'64 = 66'56 \text{ cm}^2$$

El volumen es un tercio del área de la base por la altura de la pirámide, luego se calcula como:

$$V = (A_{\text{cuadrado}} \cdot h) / 3 = (16 \cdot 6) / 3 = 32 \text{ cm}^3$$

1.4. El cilindro

Se obtiene al hacer girar un rectángulo sobre uno de sus lados.



Para calcular el área y volumen de cualquier cilindro, solo hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Para calcular el área de un cilindro, basta con sumar el área de cada una de sus caras, teniendo en cuenta que su cara lateral que es curva, en el desarrollo plano es un rectángulo, cuyos lados son la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cono.

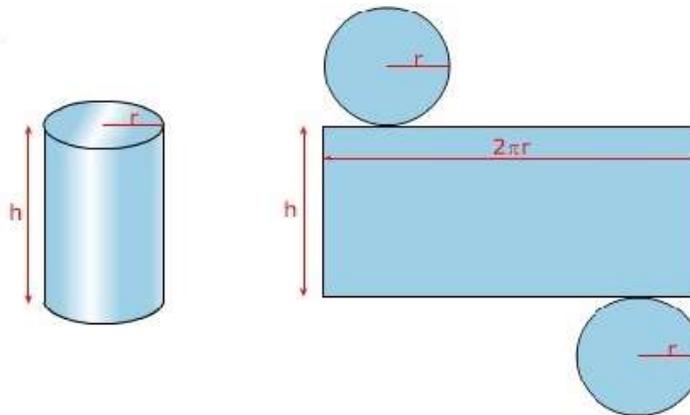
$$A_{\text{cilindro}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

- Para calcular el volumen de un cilindro, basta con multiplicar el área de la base por la altura del cilindro.

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

EJEMPLO. Calcula el área y volumen de un cilindro de radio (r) de la base 4 cm y altura (h) 5 cm.

A continuación puedes ver el cilindro y su desarrollo plano.



Para calcular el área hay que sumar la de los dos círculos (bases), que se calcula con la fórmula del área del círculo (πr^2), y también la del rectángulo que es la cara lateral, en el que un lado es la altura del cilindro y el otro es la longitud de la circunferencia de base ($2\pi r$).

Por tanto, en este caso calculamos:

$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{rectángulo}} = h \cdot 2\pi r = 5 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 4 = 125,6 \text{ cm}^2$$

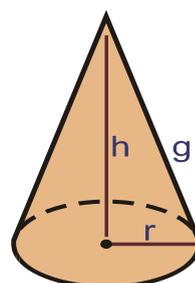
$$A_{\text{total}} = 50,24 + 50,24 + 125,6 = 176,08 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen, hay que aplicar la fórmula $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$. Estos datos los tenemos ya, por tanto

$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = 50,24 \cdot 5 = 251,2 \text{ cm}^3$$

1.5. El cono

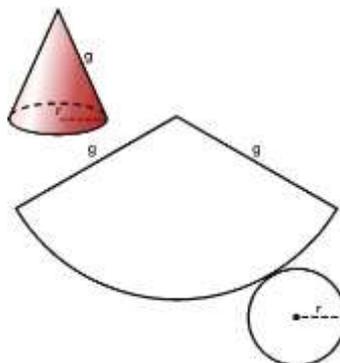
Los elementos de un cono son:



Donde h simboliza la altura del cilindro, g la generatriz y r el radio de la base. De esta forma, la altura, la generatriz y el radio forman un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es la generatriz, por lo que aplicando el Teorema de Pitágoras se cumple que:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

El desarrollo plano de un cono tiene la siguiente forma:



Para calcular el área del cono, como una de las partes de su desarrollo plano no es una figura geométrica sencilla (tiene forma de abanico), en lugar de hacer el área de sus caras y sumarlas podemos utilizar directamente esta fórmula:

$$\text{Área Total} = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

Para calcular el volumen, hay que proceder de forma similar que en el caso de la pirámide: basta con multiplicar el área de la base por la altura del cono y dividir el resultado entre 3.

$$V_{\text{cono}} = \frac{(\text{Abase} \cdot \text{altura})}{3}$$

EJEMPLO. Calcula el área y volumen de un cono de altura 10 cm y radio 3 cm.

Primero calculamos el dato que nos falta, la generatriz, aplicando Pitágoras:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$g^2 = 3^2 + 10^2$$

$$g^2 = 9 + 100$$

$$g^2 = 109$$

$$g = \sqrt{109} = 10'44 \text{ cm}^2$$

Calculamos el área con la fórmula

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot r \cdot (g + r) = 3'14 \cdot 3 \cdot (10'44 + 3) = 9'42 \cdot 13'44 = 126'60 \text{ cm}^2$$

Calculamos el volumen con la fórmula

$$V = \frac{(A_{\text{base}} \cdot \text{altura})}{3}$$

Al ser la base un círculo, se calcula su área como:

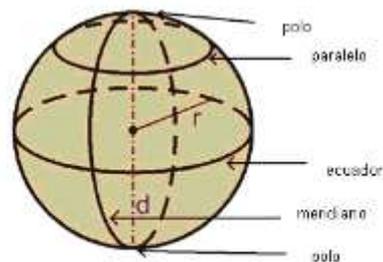
$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 3^2 = 28'26 \text{ cm}^2$$

Y el volumen será

$$V = \frac{(28'26 \cdot 10)}{3} = 94'2 \text{ cm}^3$$

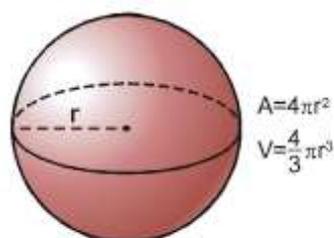
1.6. Esfera

Sus elementos son:



Y la r simboliza el radio y la d el diámetro

Para calcular el área de la superficie de la esfera y su volumen se utilizan las siguientes fórmulas:



EJEMPLO. Calcula el área y volumen de una esfera de radio 3 cm.

Calculamos el área con la fórmula

$$A_{\text{total}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3'14 \cdot 3^2 = \mathbf{113'04 \text{ cm}^2}$$

Calculamos el volumen con la fórmula

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3'14 \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot 3'14 \cdot 27 = \mathbf{113'04 \text{ cm}^3}$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el área y el volumen de prisma triangular con base un triángulo isósceles de lados iguales 5 cm y el otro 6 cm. y cuya altura del prisma es 7 cm?
2. ¿Cuál es el área y el volumen de un prisma cuadrangular cuya arista de base mide 4 cm. y de altura 7 cm.?
3. ¿Cuál es el área y el volumen de un prisma rectangular cuyas dimensiones de base son 3 y 4 cm. y la altura es 10 cm.?
4. ¿Cuál es el área y el volumen una pirámide cuadrangular con longitud de arista de base 6 cm. y apotema de las caras 5 cm.?
5. ¿Cuál es el área y el volumen de una pirámide cuadrangular con longitud de arista de base 6 cm. y de altura de la pirámide 4 cm.?
6. ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 3 m. y radio: 1 m?
7. ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 2 m. y radio: 2 m.?
8. ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 1 m. y radio: 3 m.?
9. ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 4 m. y radio: 3 m.?
10. ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de generatriz 5 m. y radio 3 m.?
11. ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de generatriz 10 m. y radio 6 m.?
12. ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de generatriz 13 m. y radio 5 m.?
13. ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de altura 12 m. y radio 9 m.?
14. ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de altura 15 m. y radio 8 m.?
15. ¿Cuál es el área y el volumen de una esfera cuyo radio es 2 m.?
16. ¿Cuál es el área y el volumen de una esfera cuyo radio es 3 m.?
17. ¿Cuál es el área y el volumen de una esfera cuyo radio es 4 m.?

18. ¿Cuál es el área y volumen de un prisma en el que la base es un pentágono de lado 6cm y apotema 5cm, y cuya altura es 10 cm?
19. Calcula área y volumen de un prisma en el que la base es un hexágono de lado 5cm y la altura es de 10 cm
20. Calcula área y volumen de un prisma en el que la base es un hexágono de lado 6cm y la altura es de 8 cm
21. Las dimensiones de un cartón de leche son 9'5 cm de ancho, 16'5 cm de alto y 6'4 cm de fondo. ¿Cuál será su capacidad (volumen) en litros?
22. Una piscina comunitaria rectangular tiene 2 metros de profundidad, y unas dimensiones de 15 metros de ancho por 25 metros de largo. Si se pagan 16 céntimos de euro por litro de agua, ¿cuánto dinero costará llenarla?. La normativa autonómica exige que haya socorrista si la lámina de agua supera los 100 metros cuadrados. ¿Sería obligatorio contratar socorrista en esta piscina?
23. El Jabulani, balón del mundial 2010 de fútbol en el que España fue campeona del mundo, tenía una circunferencia de 69 centímetros. ¿Cuál sería su volumen?
24. Compramos un helado de cucurucho cuyas dimensiones se adjuntan en el dibujo. ¿Cuál será el área y volumen del cucurucho?

