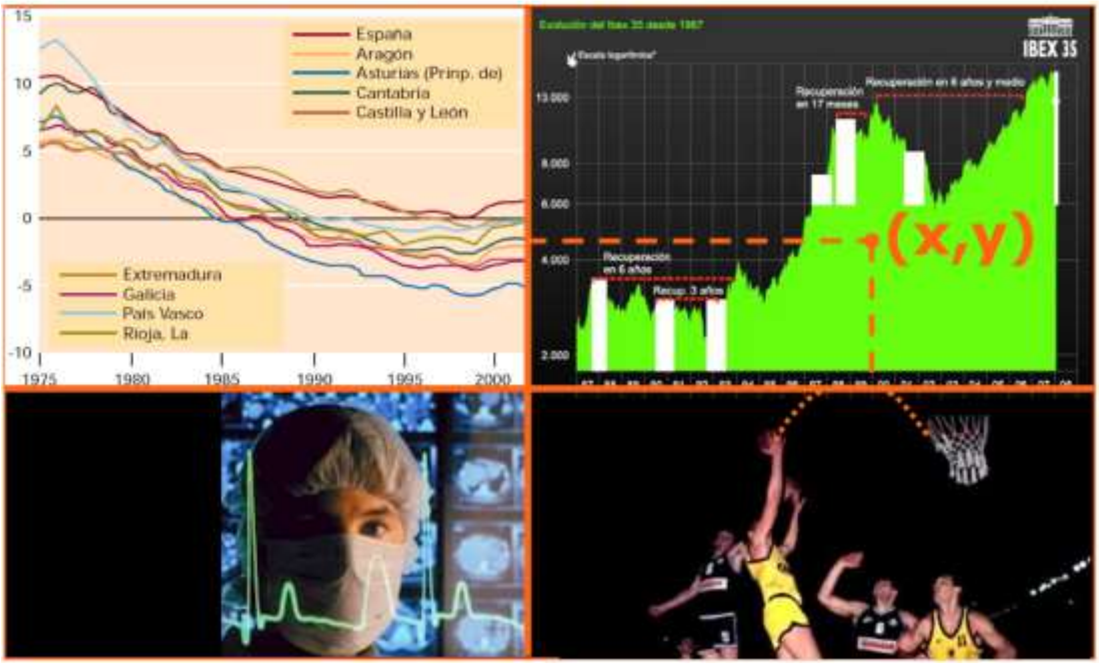
Tema 8. Funciones

1. Introducción

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de función. Una función se puede aplicar en numerosas situaciones de la vida cotidiana, de forma que permita determinar las relaciones que existen entre ciertas magnitudes, en numerosos campos como las matemáticas, físicas, economía, etc. A través de las funciones, se puede calcular el valor de una magnitud en función de otra de la que depende.



1.1. Tabla de datos

Una tabla es una representación de datos, mediante pares ordenados, expresan la relación existente entre dos magnitudes o dos situaciones.

La siguiente tabla nos muestra la variación del precio de las patatas, según el número de kilogramos que compremos.

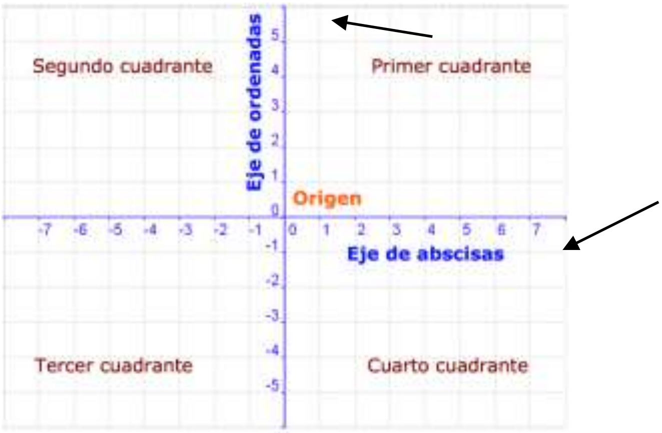
Kg de patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

La siguiente tabla nos indica el número de alumnos que consiguen una determinada nota en un examen.

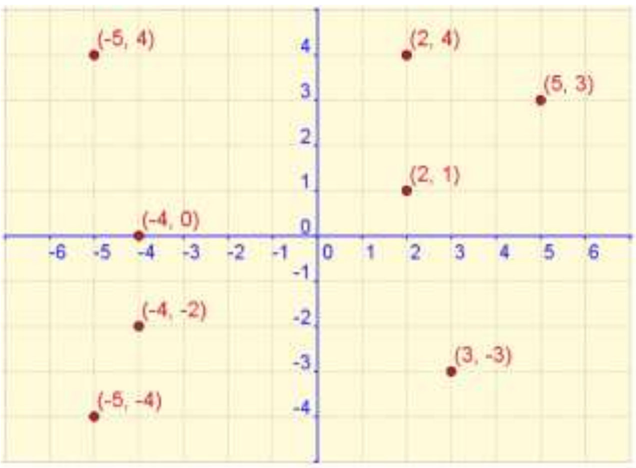
Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	1	1	2	3	6	11	12	7	4	2	1

1.2. Ejes de coordenadas

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes iguales y a cada una de ellas se les llama cuadrante. Un sistema de ejes coordenados (o cartesianos) está formado por dos ejes numéricos perpendiculares, **uno horizontal, llamado de abscisas y otro vertical o de ordenadas.**



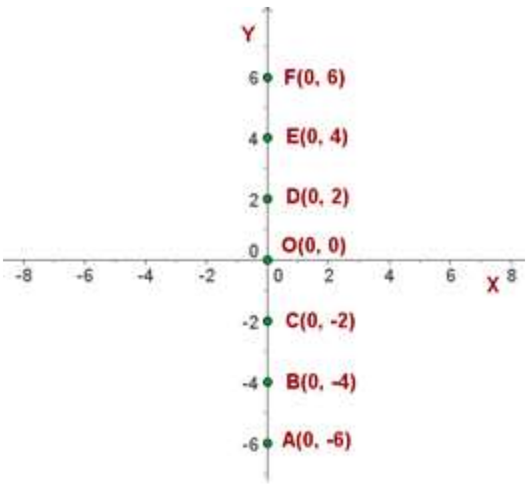
La primera coordenada o abscisa de un punto nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical**. La segunda coordenada u ordenada** indica la distancia a la que se encuentra el punto del eje horizontal.



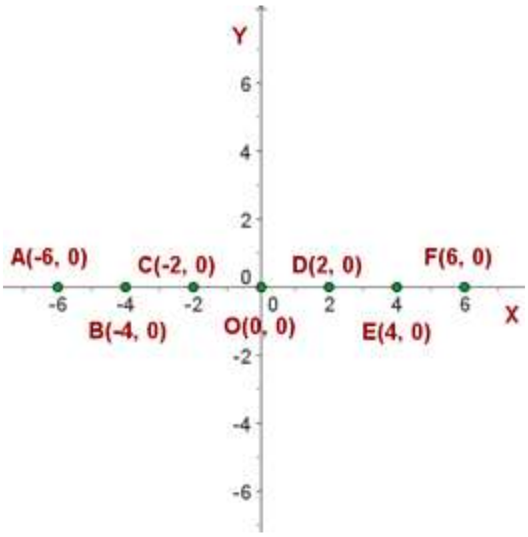
El origen de coordenadas, O, tiene de coordenadas: O(0, 0).

Signos

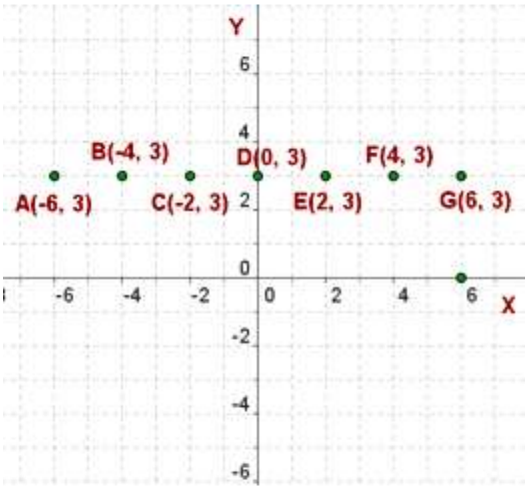
	Abscisa	Ordenada
1er cuadrante	+	+
2º cuadrante	−	+
3er cuadrante	−	−
4º cuadrante	+	−



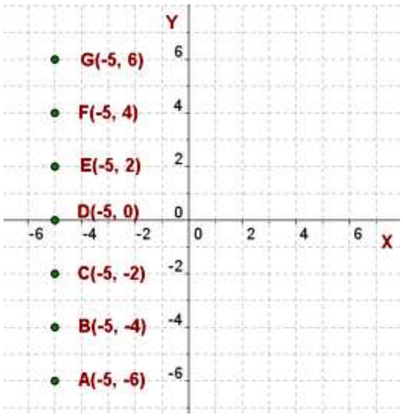
Los puntos que están en el eje de ordenadas “y” tienen su abscisa “x” igual a 0.



Los puntos situados en el eje de abscisas “x” tienen su ordenada “y” igual a 0.



Los puntos situados en la misma línea horizontal (paralela al eje de abscisas) tienen la misma ordenada.



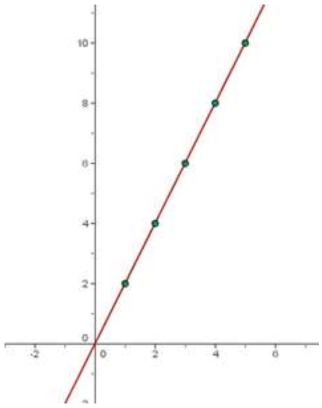
Los puntos situados en una misma línea vertical (paralela al eje de ordenadas) tienen la misma abscisa.

1.3. Gráficas

Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla. Las gráficas describen relaciones entre dos variables. La variable que se representa en el eje horizontal se llama variable independiente o variable x. La que se representa en el eje vertical se llama variable dependiente o y. La variable y está en función de la variable **x**.

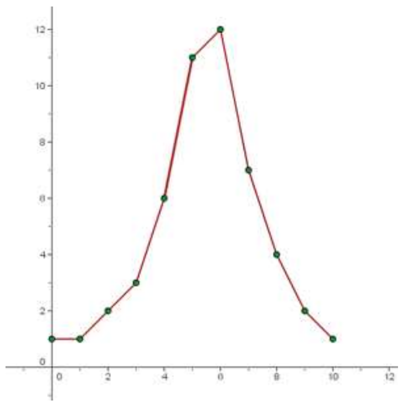
Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones. Para interpretar una gráfica, hemos de observarla de izquierda a derecha, analizando cómo varía la variable dependiente, y, al aumentar la variable independiente, x.

Kg de patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10



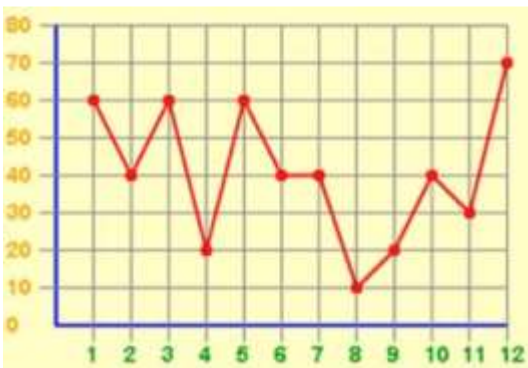
En esa gráfica podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando. Es creciente.

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	1	1	2	3	6	11	12	7	4	2	1



En esta gráfica observamos que la mayor parte de los alumnos obtienen una nota comprendida entre 4 y 7.

EJEMPLO 1. ***La empresa EDAD S.A. cotiza en Bolsa desde hace algunos años. En la gráfica adjunta se muestran las cotizaciones (en €) de sus acciones durante el año 2008. ¿Cuál ha sido la mayor cotización alcanzada por sus acciones? ¿En qué mes se consiguió? ¿Cuál ha sido el menor valor alcanzado por las acciones? ¿Cuál fue el mes en que se alcanzó esa mínima cotización? ¿Qué cotización se alcanzó en el mes de junio?***

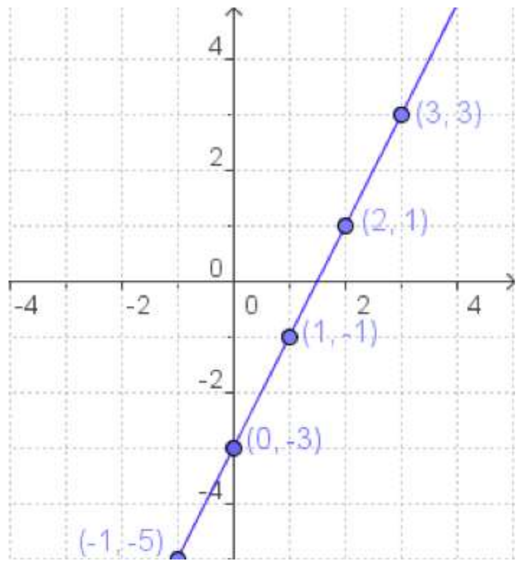


La mayor cotización fue de 70 € y se alcanzó en diciembre. La menor cotización fue de 10 € y se alcanzó en agosto. En el mes de junio las acciones se cotizaron a 40 €

OTROS EJEMPLOS

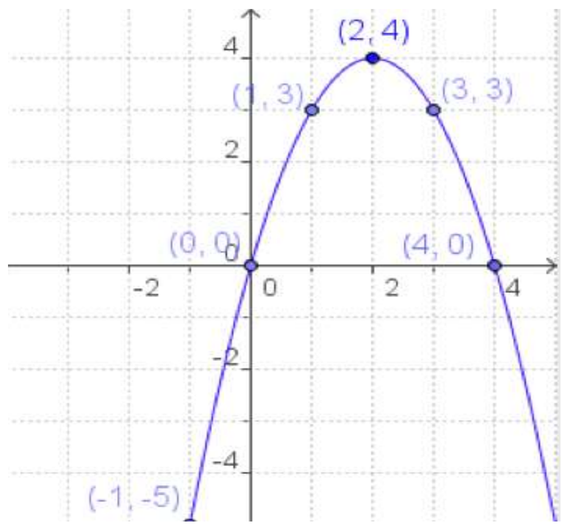
a) $y = 2x - 3$

X	Y
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



b) $y = -x^2 + 4x$

X	Y
0	0
1	3
2	4
3	3
-1	-5
-2	-12



2. Funciones

Una función es una relación entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, llamada imagen. Si tenemos una gráfica en la que para algún valor de x hay varios de y, esa gráfica NO representa una función.

Se relacionan así dos variables numéricas que suelen desisgnarse con x e y.

$$f: x \rightarrow y = f(x)$$

- ✓ x es la variable independiente
- ✓ y es la variable dependiente

A continuación se muestra un ejemplo de una etapa de la vuelta ciclista a España, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto. Representada sobre los ejes cartesianos, observa la tabla de valores para ver sus correspondencias.

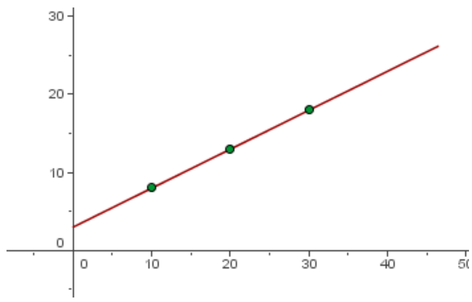
km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

EJEMPLO 1. ***El precio de un viaje viene dado por: y = 3 + 0.5x ; Siendo x el tiempo en minutos que dura el viaje.***

*Como podemos observar la función relaciona dos variables. x e y, **x** es la variable independiente, **y** es la variable dependiente (depende de los minutos que dure el viaje).*

Las funciones se representan sobre unos ejes cartesianos para estudiar mejor su comportamiento.

X	y= 3 + 0.5x
0	3
10	8
20	13
30	18



Existen varios tipos de funciones, centrándonos en esta unidad en las funciones lineales, lineales afines y cuadráticas.

Cuando una expresión es una función podemos escribirla de la siguiente forma

$y = x^2 - 2 \xrightarrow{\text{Se lee: "f de x"}} f(x) = x^2 - 2$

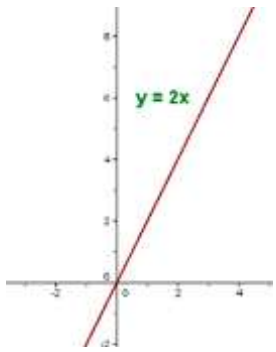
x	y
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2

x	f(x)
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2

3. Función lineal

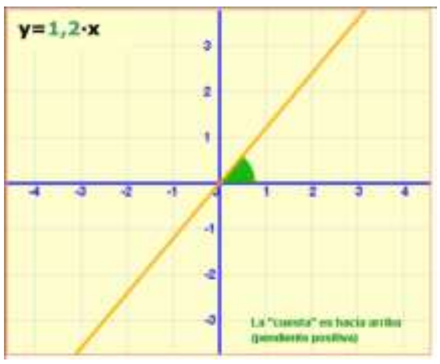
Es una función de primer grado y tiene una ecuación del tipo: **y = mx**. Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

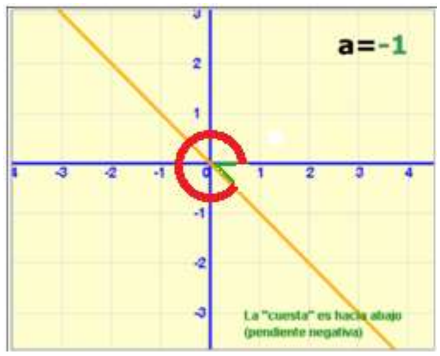
x	y = 2x
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



Pendiente

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. La representa la **m**.

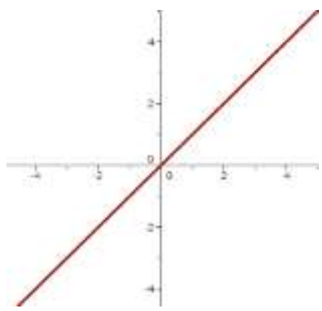




Si **m > 0** la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **agudo**. La cuesta es hacia arriba (pendiente positiva).

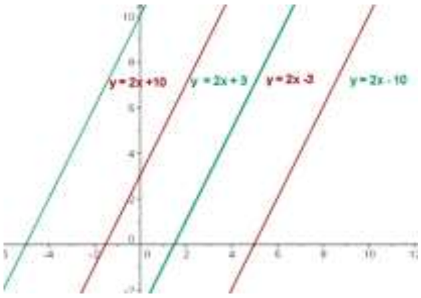
Si **m < 0** la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **obtuso**. La cuesta es hacia abajo (pendiente negativa).

Función identidad f(x) = x. Su gráfica es la bisectriz de los ángulos que forman los ejes en el primer y tercer cuadrante.



3.1. Función lineal afín

Es una función de primer grado y su ecuación es del tipo: **y = mx + n**, **m** es la pendiente y **n** la ordenada de origen (0,n). Su gráfica es también una recta, pero no pasa por el origen de coordenadas.



n es la ordenada en el origen y <u>nos indica el punto de corte de la recta con el eje de *y*</u>.

Nota: Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

4. Características de una función

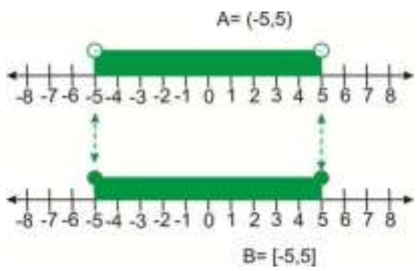
Antes de ver sus características, es importante recordar la notación científica de los intervalos de números reales, pues nos ayudarán a la realización de los ejercicios adecuadamente.

RECUERDA QUE…

Un intervalo es un conjunto de infinitos números reales entre un dos valores numéricos
Los extremos marcarán dónde empieza y dónde termina el intervalo
Si los extremos quedan fuera del intervalo, se pondrán con paréntesis (,)
Si los extremos quedan dentro del intervalo, se pondrán con corchetes [,]

Por ejemplo:

- ***[1,5]: intervalo que incluye todos los números entre 1 y 5, ambos inclusive***
- ***(1,5]: se incluyen todos los números entre 1 y 5, exceptuando el 1***
- ***(1,5): intervalo que incluye todos los números entre 1 y 5, exceptuando 1 y 5***



Además, para analizar correctamente las gráficas de las funciones, debemos tener en cuenta las siguientes premisas:

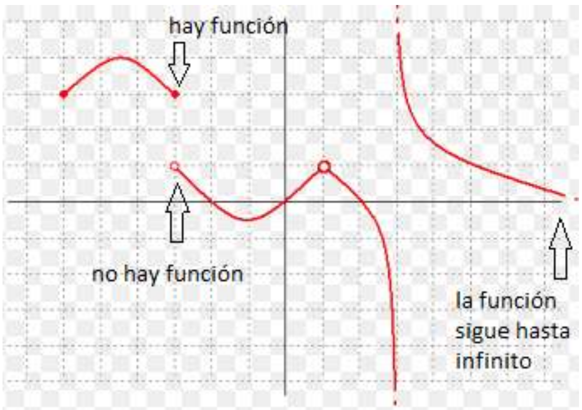
- Utilizaremos llaves { } para referirnos a valores concretos.

  Ejemplo: *{1,3,7} Nos referiremos exclusivamente a los números 1, 3 y 7. (NO HAY INTERVALOS)*

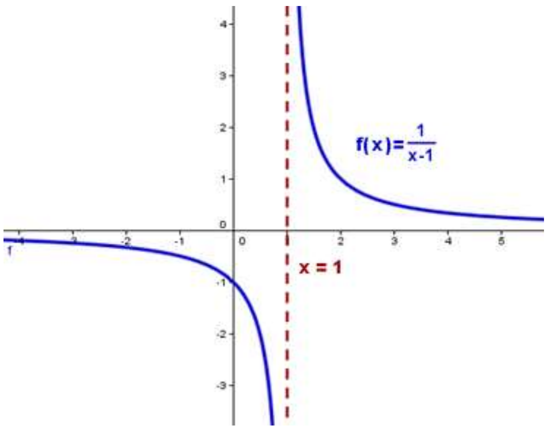
- Cuando en una gráfica veamos un círculo abierto °, es porque no existe función en ese punto.

- Cuando en una gráfica veamos un círculo sombreado •, es porque existe función en ese punto.

- Cuando veamos la línea de la función que no tiene fin, en cualquiera de los ejes, es porque sigue hasta más infinito +∞ o menos infinito -∞. En un intervalo, si un extremo es un valor infinito, siempre se representará con paréntesis, nunca con llaves.



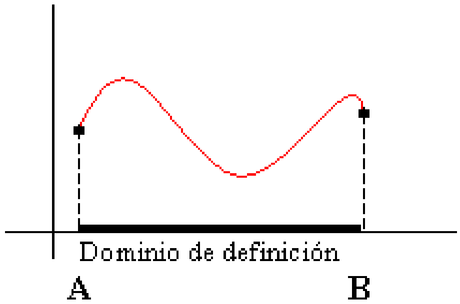
- Una asíntota es un eje (bien horizontal o bien vertical), al que la gráfica de la función se va a acercando cada vez más, pero sin llegar a tocarlo nunca.



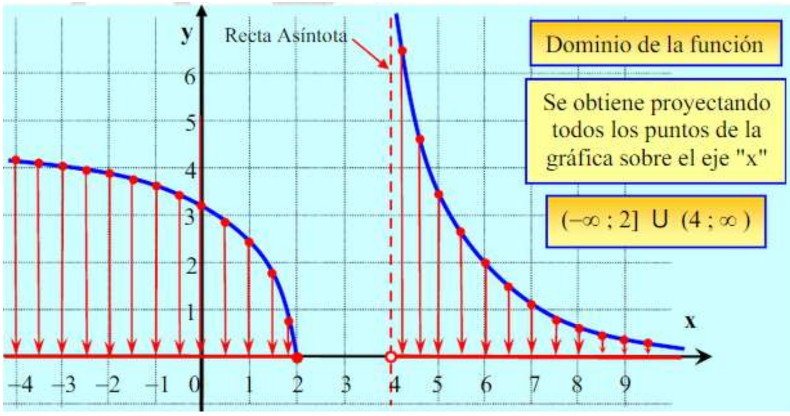
En esta gráfica, hay dos asíntotas, en y = 0 y x = 1. Observa que la función se acercará a x=1 cada vez más, por arriba y por abajo, pero nunca llegará a alcanzar ese valor.

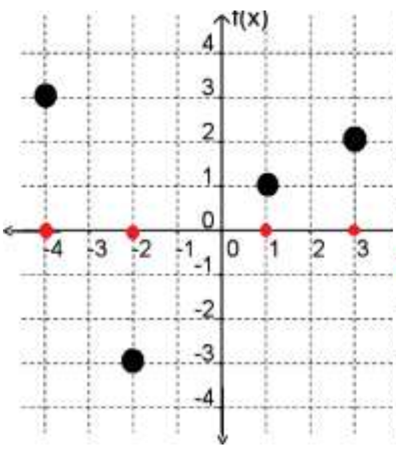
4.1. Dominio y recorrido de una función.

<u>**Dominio**:</u> es el conjunto de todos los valores que toma la función en el eje **x**. Leemos de ***izquierda a derecha*** en el eje x y vemos para qué valores hay función.

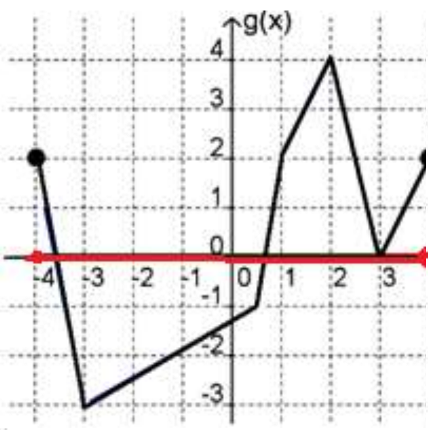


EJEMPLOS de dominios

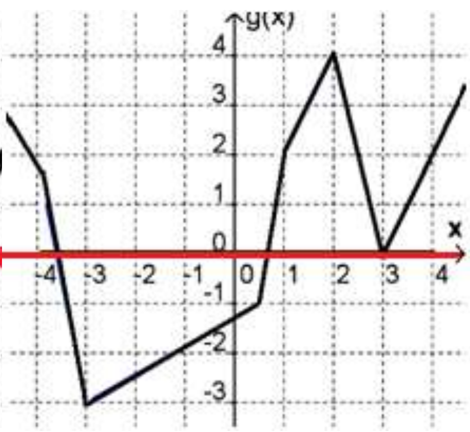




Dom = {-4, -2, 1, 3}



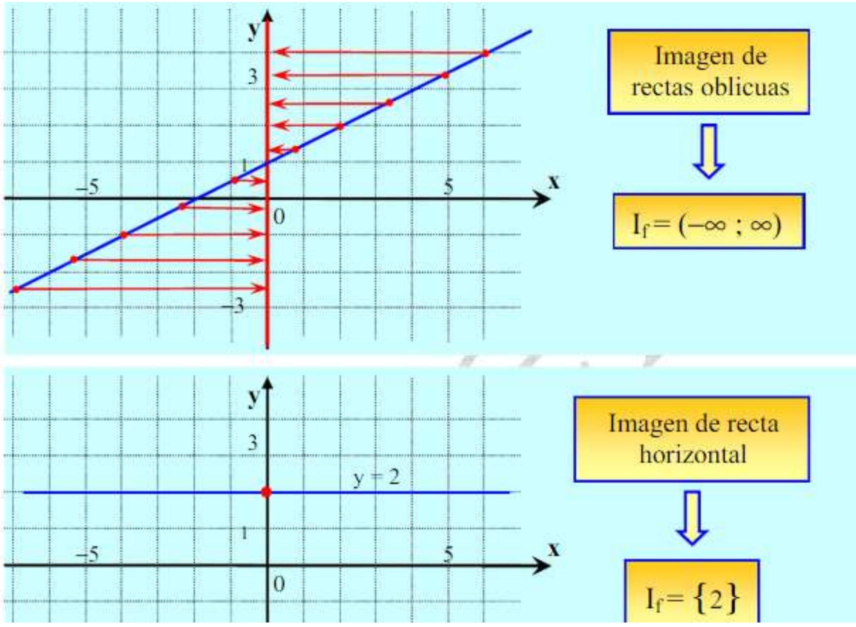
Dom = [-4, 4]

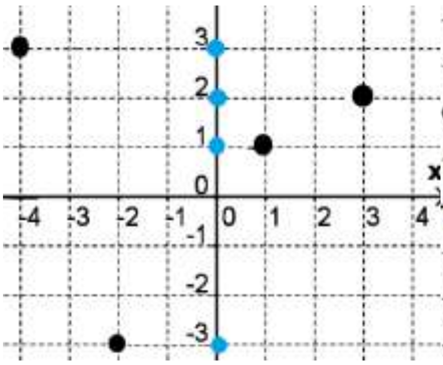


Dom = R ó (-∞ , ∞)

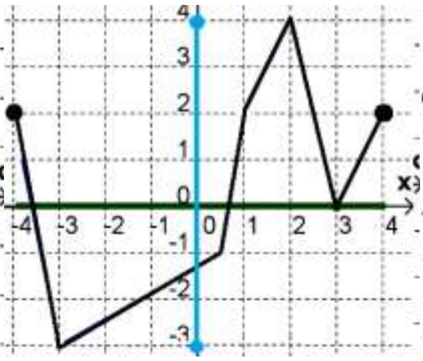
Imagen, Rango o Recorrido: Conjunto de todos los valores que toma la función en el eje y. Leemos de **abajo a arriba en el eje y**, y vemos para que valores hay función.

EJEMPLOS de recorridos

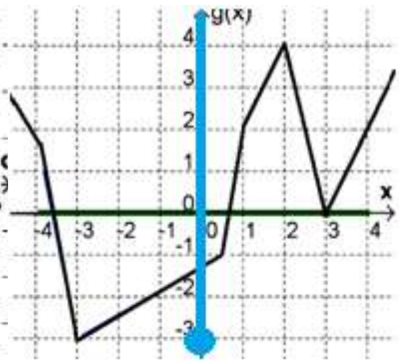




Rec = {-3, 1, 2, 3}

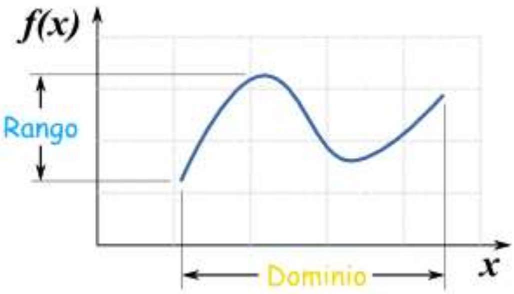


Rec = [-3, 4]



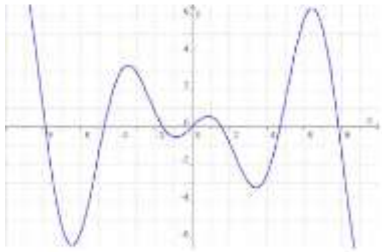
Rec = [-3, ∞)

El recorrido es por tanto la proyección de los puntos de la función sobre el eje Y, mientras que en dominio es la proyección en el eje X.



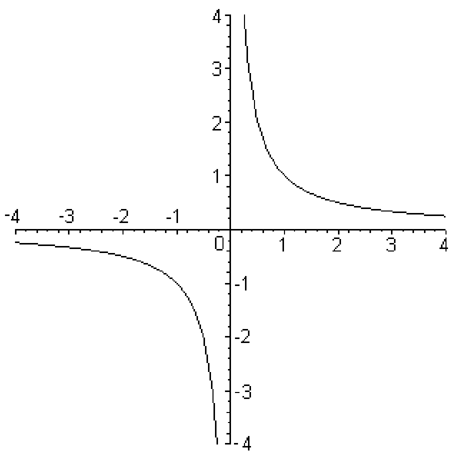
4.2. Continuidad y discontinuidad en el dominio

- **Continuidad:** una función es continua en el dominio, cuando se puede repasar sin levantar el lápiz del papel.

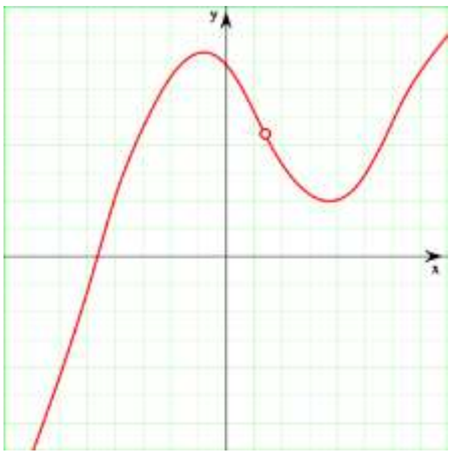


Continua

Si en un intervalo o punto del eje X no hay función, se entiende que habrá salto al dibujarla, pero no discontinuidad en el dominio, pues esos puntos no son del dominio. A continuación vemos ejemplos:



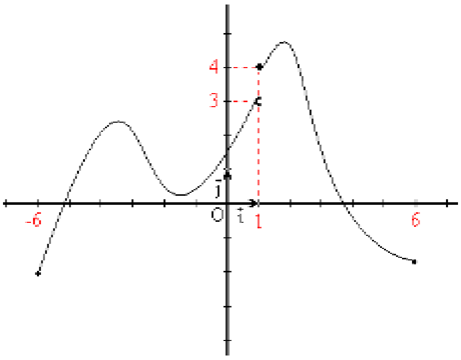
En esta función, en x=0 hay asíntotas, y ese valor queda fuera del dominio, que es (-∞,0) U (0,+∞). <u>Es evidente que hay un salto en x=0 a la hora de dibujar la función, pero al no ser un punto del dominio, la función sigue siendo continua en el dominio,</u> <u>porque se puede representar de un solo trazo en cada uno de los intervalos de su dominio</u>.



En esta función, en x=1’5 hay un punto abierto, y ese valor queda fuera del dominio, que es (-∞,1’5) U (1’5,+∞). <u>Es evidente que hay un salto en x=1’5 a la hora de dibujar la función, pero al no ser un punto del dominio, la función sigue siendo continua en el dominio,</u> <u>porque se puede representar de un solo trazo en cada uno de los intervalos de su dominio</u>.

- **Discontinuidad en el dominio:** Se dice que una función es discontinua en un punto del dominio si en un punto del dominio, al dibujar la gráfica, es necesario levantar el lápiz del papel. La discontinuidad se dará cuando para un valor de x, encontremos un círculo abierto y otro sombreado en la gráfica.

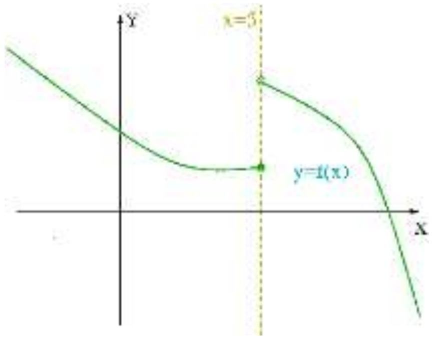
EJEMPLOS de continuidad y discontinuidad



Dominio = [-6, 6]

Discontinua en {1}

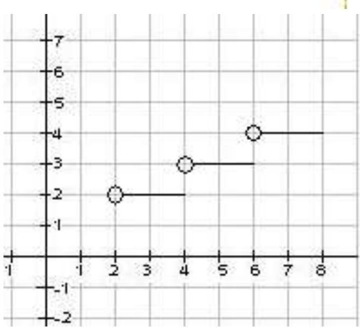
Continua en [-6, 1) U (1,6]



Dominio = (-∞, +∞)

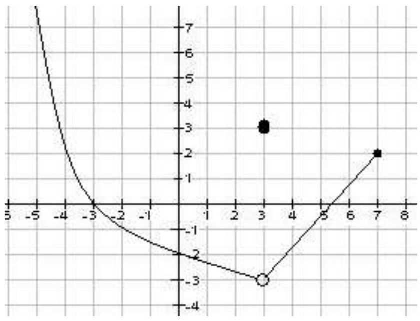
Discontinua en {5}

Continua en (-∞, 5) U (5,+ ∞)



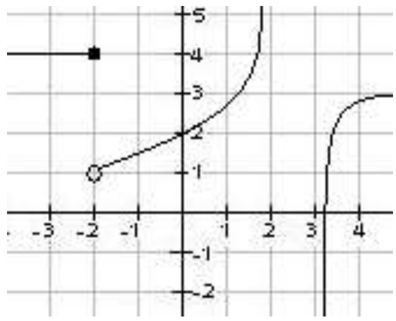
Continua en:
(2,4)U(4,6)U(6,8]

Discontinua en: {4,6}



Continua: (- ∞ ,3) U (3,7]

Discontinua en: {3}



Continua en:

(-∞ ,-2)U(-2,2)U(3,∞)

Discontinua en: {-2}

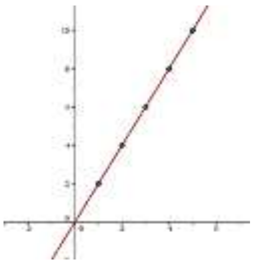
NOTA: Es importante que tengas en cuenta que un mismo valor de x no puede estar en los puntos y/o intervalos de continuidad, y simultáneamente en los de discontinuidad. Si la función es discontinua en {3}, no puede ser continua en un intervalo del tipo (-∞, 3] o [3,+∞). El 3 deberá aparecer forzosamente con paréntesis en todos los intervalos de continuidad, puesto que en otro caso estaríamos diciendo que la función es discontinua en x=3, y continua en x=3, lo cuál es incongruente.

4.3. Crecimiento y decrecimiento

- **Función creciente:** una función es creciente cuando al aumentar los valores de x aumentan los valores de y. *Esto quiere decir que cuando nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia arriba.*
- **Función decreciente:** una función es decreciente cuando al aumentar los valores de x disminuyen los valores de y. *Esto quiere decir que cuando nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia abajo.*
- **Función constante:** una función es constante cuando al aumentar los valores de x, el valor de y no cambia.

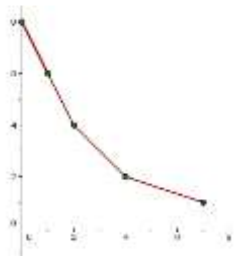
Función creciente

Una gráfica es creciente si al aumentar la variable independiente aumenta la otra variable.



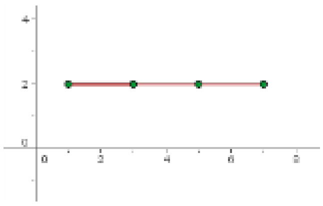
Función decreciente

Una gráfica es decreciente si al aumentar la variable independiente disminuye la otra variable.



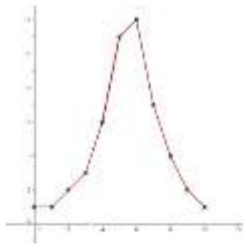
Función constante

Una gráfica es constante si al variar la variable independiente la otra permanece invariable.



Observa que

Una gráfica puede tener a la vez partes crecientes y decrecientes.



4.4. Máximos y Mínimos

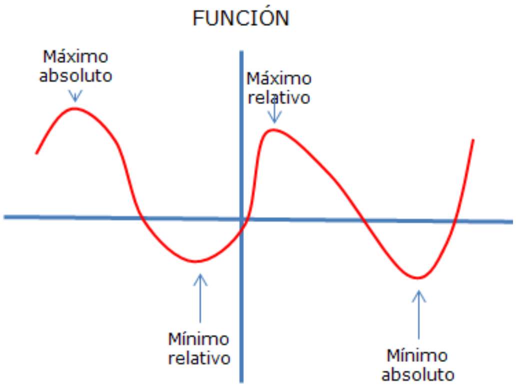
Máximos:

- **Máximo relativo.** Cuando en un punto existe una rama creciente por su izquierda y decreciente por su derecha.

- **Máximo absoluto.** Es un punto de la función donde la **y** es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función. Gráficamente, será el punto o los puntos más altos de la función. No siempre existen:
  - si el punto más alto no está sombreado, se considera que no hay
  - si el recorrido de la función va hasta +∞, se considera que no hay

Mínimos:

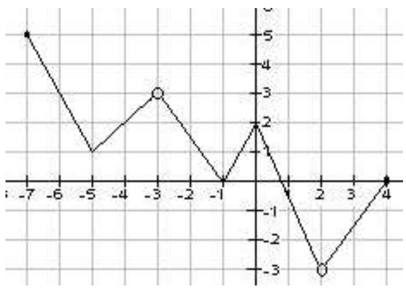
- **Mínimo relativo.** Cuando en un punto de la función existe una rama decreciente por su izquierda y una rama creciente por su derecha.
- **Mínimo absoluto.** Es un punto de la función donde la **y** es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función. Gráficamente, será el punto o los puntos más altos de la función No siempre existen:
  - si el punto más bajo no está sombreado, se considera que no hay
  - si el recorrido de la función empieza en -∞, se considera que no hay



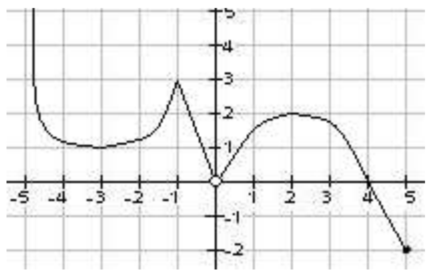
Hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- *No siempre existen máximos y mínimos*
- *Pueden existir muchos, incluso infinitos, máximos y mínimos de cada tipo*
- *Un punto puede ser a la vez máximo absoluto y relativo*
- *Un punto puede ser a la vez mínimo absoluto y relativo*

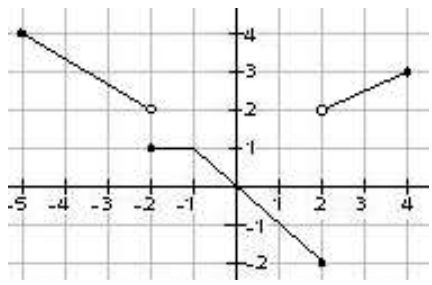
EJEMPLOS de máximos y mínimos



Max absoluto: (-7,5)
Max relativo: (0,2)
Min absoluto: No hay
Min relativo: (-5,1), (-1, 0)
Creciente: (-5,-3)U(-1,0)U(2,4)
Decrec: (-7,-5)U(-3,-1)U(0,2)

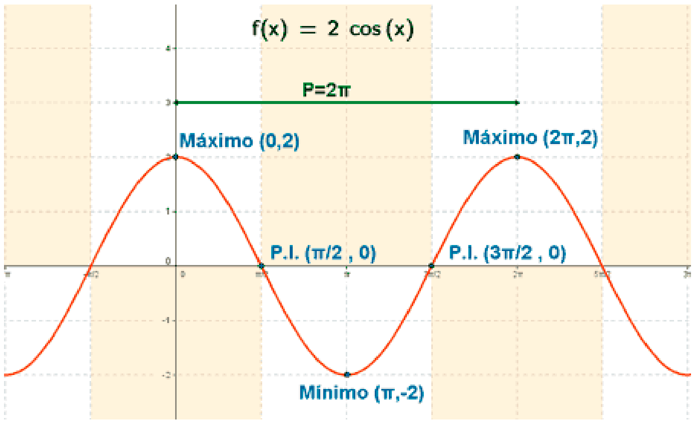


Max absoluto: No hay
Max relativo: (-1,3), (2,2)
Min absoluto: (5,-2)
Min relativo: (-3,1)
Crec: (-3,-1) U (0,2)
Decrec: (-5,-3)U(-1,0)U(2,5)

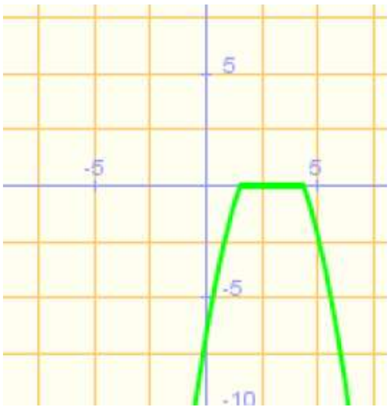


Max abs: (-5,4)
Max relat: No hay
Min abs: (2,-2)
Min relat: No hay
Crec: (2,4)
Decrec: (-5,-2) U (-1,2)
Constante: (-2,-1)

Las funciones trigonométricas seno o coseno, tienen infinitos puntos que son máximos absolutos y relativos, e infinitos puntos que son mínimos absolutos y relativos.



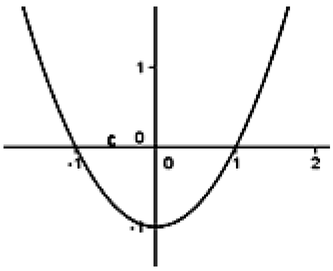
Otro caso particular es cuando en la función, existen rectas horizontales que están en la parte más elevada o más baja de la gráfica. En ese caso, todos los puntos de la recta son máximos o mínimos absolutos.



En este ejemplo, serían máximos absolutos todos los puntos cuyo valor de x esté en el intervalo [1’25, 4,75]

4.5. Puntos de corte en los ejes.

Dónde toca la función el eje de ordenadas y de abcisas.



Cortes con el eje x: El valor de y siempre es cero: (x,0). En la figura son **(-1,0), (1,0)**

Corte con el eje y: El valor de x siempre es cero (0,y). Sólo hay un punto de corte en la figura anterior, el **(0,-1)**

A partir de toda la información anterior, es posible representar también, de manera aproximada, una función. De esta forma, los datos que se nos ofrezcan nos darán la siguiente información:

- Dominio: valores del eje x en los que existirá la gráfica
- Recorrido: valores del eje y en los que existirá la gráfica
- Discontinuidad: punto del dominio donde habrá un salto al dibujar la gráfica
- Máximo absoluto: puntos más altos de la gráfica
- Mínimo absoluto: puntos más bajos en la gráfica
- Mínimo relativo: tendrá una rama decreciente a la izquierda y otra creciente a la derecha
- Máximo relativo: tendrá una rama creciente a la izquierda y otra decreciente a la derecha
- Puntos de corte con los ejes: nos dirá donde corta la gráfica a cada eje.
- Intervalos de crecimiento: en esos valores, en el eje x, la gráfica subirá de izquierda a derecha.
- Intervalos de decrecimiento: en esos valores, en el eje x, la gráfica bajará de izquierda a derecha.

EJEMPLO. Representa gráficamente la función, sabiendo que:

a) Dom = [-6, 6]

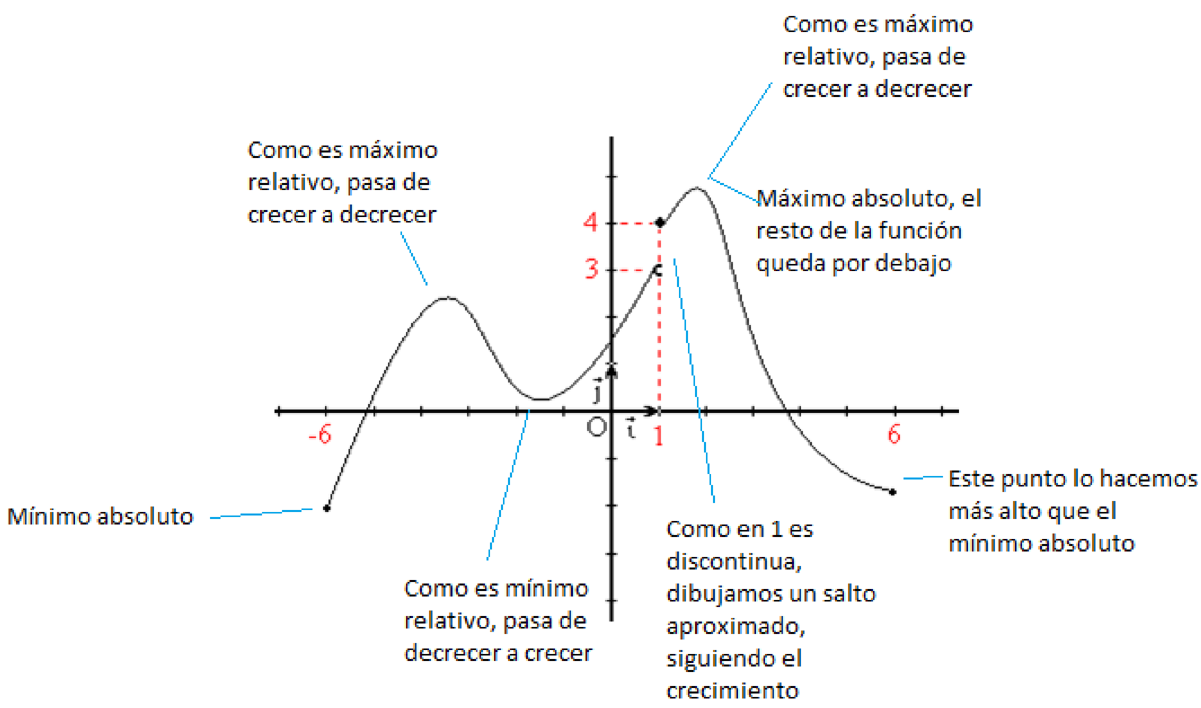
b) Rec = [-2, 5]

c) Mínimo absoluto en (-6,-2)

d) Máximo relativo en (-3'5, 2'5) y (2,5)

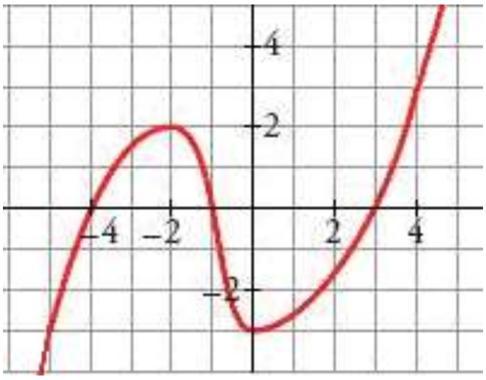
e) Mínimo relativo en (-1'5, 0'5)

f) Discontinua en {1}



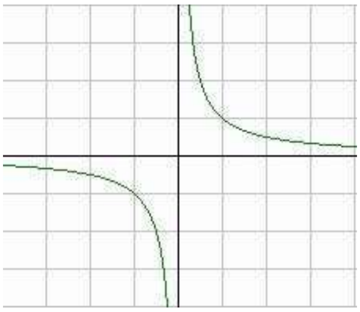
Otras funciones

1. Polinómica:



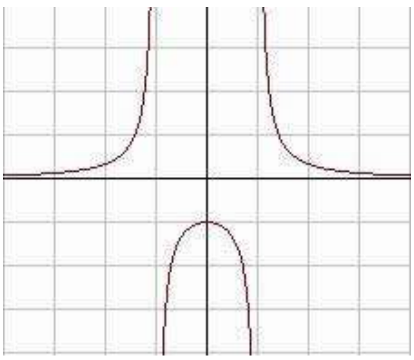
- **Dominio:** Dominio f(x) = R
- **Recorrido:** R
- **Puntos de corte**
  - **Eje x:** (-4,0), (-1,0), (3,0)
  - **Eje y:** (0,-3)
- **Continuidad:** Es continua en R (no hay saltos)
- **Crecimiento y decrecimiento.** Miramos el eje x de izquierda a derecha y vemos que:
  - Desde x ($-\infty$, -2) creciente
  - Desde x (-2, 0) decreciente
  - Desde x (0, $+\infty$) creciente
- **Máximo abs: No hay Máx relativo:** (-2, 2)
- **Mínimo abs:** No hay **Mín relativo:** (0, -3)

2. Racional:



- **Dominio f(x)**: R - { 0 } . En x = 0 la función no existe.
- **Recorrido**: R - { 0 }
- **Puntos de corte:** no corta a los ejes
- **Continuidad:** la función es discontinua en x = 0, hay un salto. Podemos leer función por la izquierda y por la derecha de x = 0 pero no en x = 0. ($-\infty$,0)U(0, $+\infty$)
- **Crecimiento y decrecimiento:** las dos ramas de la función son decrecientes.
- **Máximos y mínimos:** no tiene

3. Racional:



- **Dominio f(x):** R - { -1, 1 }
- **Recorrido:** ($-\infty$, -1] U (0, $+\infty$)
- **Puntos de corte:** no corta a el eje x.
  - **Eje y:** (0,1)
- **Continuidad**
  - La función es discontinua en x = -1, hay un salto.
  - La función es discontinua en x = 1, hay un salto.
- **Crecimiento y decrecimiento**
  - Crece desde ($-\infty$, -1) U (-1, 0)
  - Decrece desde (0, -1) U (-1, $+\infty$)
- **Máximos y Mínimos:** tiene un máximo relativo en el punto (0, -1)

4.5. Cálculo del dominio de una función

Funciones polinómicas: Aquellas cuya ecuación es un polinomio, sea del grado que sea. El dominio siempre es todos los números reales.

Ejemplos:

De primer grado: $f(x) = 2x + 1$

De segundo grado: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\xrightarrow{\text{Expresión}} \begin{cases} \text{Dominio } f(x)\text{: } \mathbb{R} \\ \text{Dominio } f(x)\text{: } (-\infty, +\infty) \end{cases}$

De grado superior a dos $\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ f(x) = x^4 + 2x + 1 \end{cases}$

Funciones racionales (**P(x)/Q(x)**). Aquellas en las que un polinomio divide a otro.El dominio son todos los números reales excepto aquellos con los que el denominador sea cero. Debemos mirar primero si se pueden simplificar el numerador y el denominador. Para hallar el dominio, igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación resultante. Si esa ecuación se anula para algún valor, el dominio son todos los reales menos ese valor.

Ejemplo:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Dominio $f(x)$: $\mathbb{R} - \{1\}$

Funciones con raíces cuadradas. $\sqrt{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0$

. El radicando debe ser mayor o igual a cero. Una manera de calcular el dominio es resolver la inecuación planteada como radicando ≥ 0.

Ejemplos

1. $f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$ Dominio $f(x)$: $[-1, \infty)$

2. $f(x) = \sqrt{-x+1} \Rightarrow -x + 1 \geq 0 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$ Dominio $f(x)$: $(-\infty, 1]$

Para resolver inecuaciones…

Si a los dos miembros se les suma, resta, multiplica o divide un mismo número, la inecuación resultante es equivalente a la inicial (Ejemplo 1: $3x + 4 < 5 \rightarrow 3x + 4 - 4 < 5 - 4 \rightarrow 3x < 1$**, Ejemplo 2:** $2x < 6 \rightarrow 2x : 2 < 6 : 2 \rightarrow x < 3$**)**

Si a los dos miembros de la inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo, la inecuación resultante cambia de sentido y es equivalente a la dada (Ejemplo: $-x < 5 \rightarrow (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \rightarrow x > -5$**)**

Otra manera de calcular el dominio de funciones con raíces, sin necesidad de plantear inecuaciones, es igualando el radicando a 0 y resolver la ecuación. Por ejemplo, para $f(x) = \sqrt{3-x}$

$$3 - x = 0 \rightarrow x = 3$$

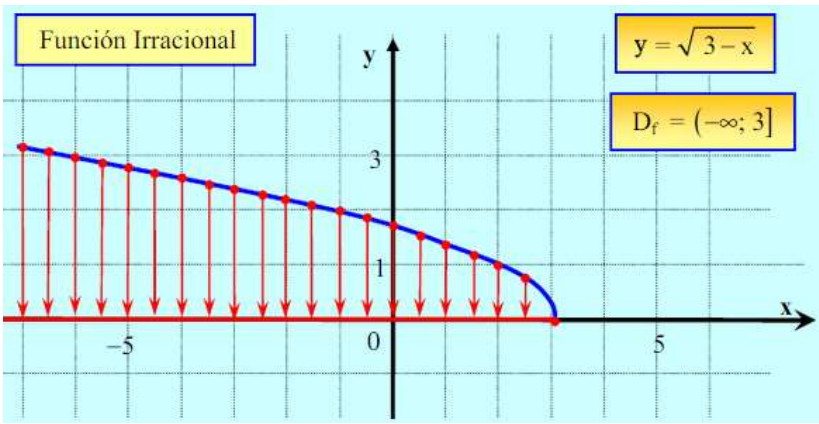
Una vez que tenemos la solución, tomamos un valor mayor y uno menor, y lo sustituimos en el radicando.

- Tomamos un valor mayor que 3, por ejemplo 4, y sustituimos en 3 - x = 3 - 4 = -1
- Tomamos un valor menor que 3, por ejemplo 0, y sustituimos en 3 - x = 3 - 0 = +3

Analizamos ahora los valores:

- Para valores menores que 3, el radicando dará resultado positivo, por lo que existirá la función.
- Para valores mayores que 3, el radicando dará resultado positivo, por lo que NO existirá la función (al no existir la raíz cuadrada de un número negativo).
- Para el valor 3, el radicando valdrá 0, y como la raíz cuadrada de 0 si existe, es 0, existe la función en 3.

Por tanto, el dominio serán los valores menores o iguales a 3.

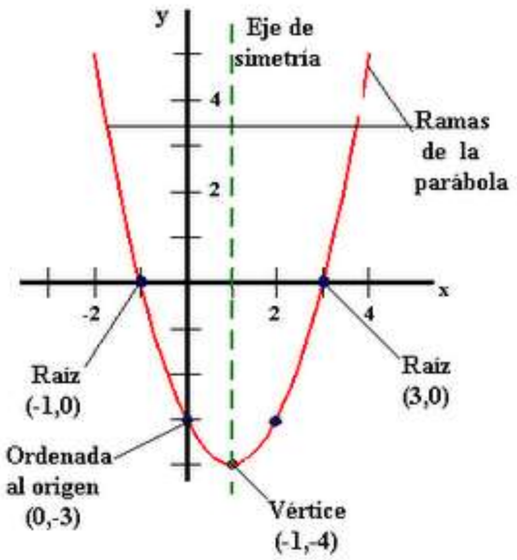


5. La Función Cuadrática

5.1. Definición.

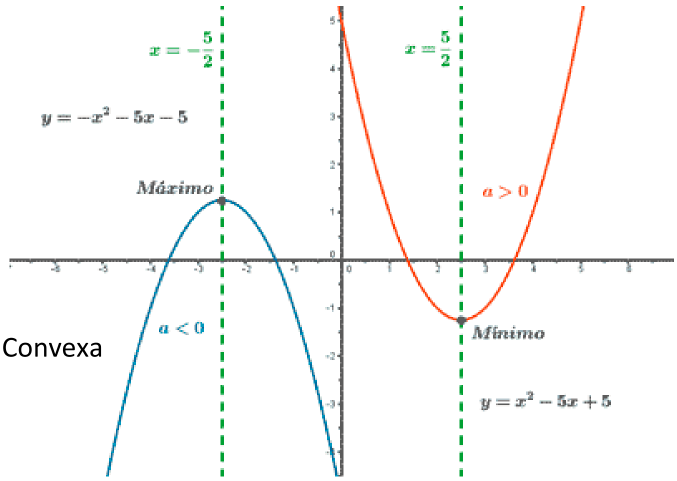
Son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.

$$\mathbf{f(x)= ax^2 + bx + c}$$



Podemos encontrarnos con distintos tipos de parábolas, en función de su punto máximo o mínimo, tendremos parábolas **cóncavas o convexas.**

Cóncava



5.2. Representación gráfica de la parábola

Podemos construir una parábola a partir de estos puntos:

a) Vértice: V(x_0, y_0)

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad y_0 = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Para la función **$y = x^2 + 6x + 5$**, su vértice es:

$$\mathbf{x_0} = \frac{-6}{2.1} = \mathbf{-3}, \qquad \mathbf{y_0} = f(\mathbf{-3}) = (-3)^2 + 6.(-3) + 5 = \mathbf{-4} \qquad \mathbf{V(-3,-4)}$$

Si **a > 0** la parábola será **cóncava**. Si **a < 0** la parábola será **convexa**.

b) Puntos de corte con el eje OX. Para saber cuántos puntos de corte basta con resolver:

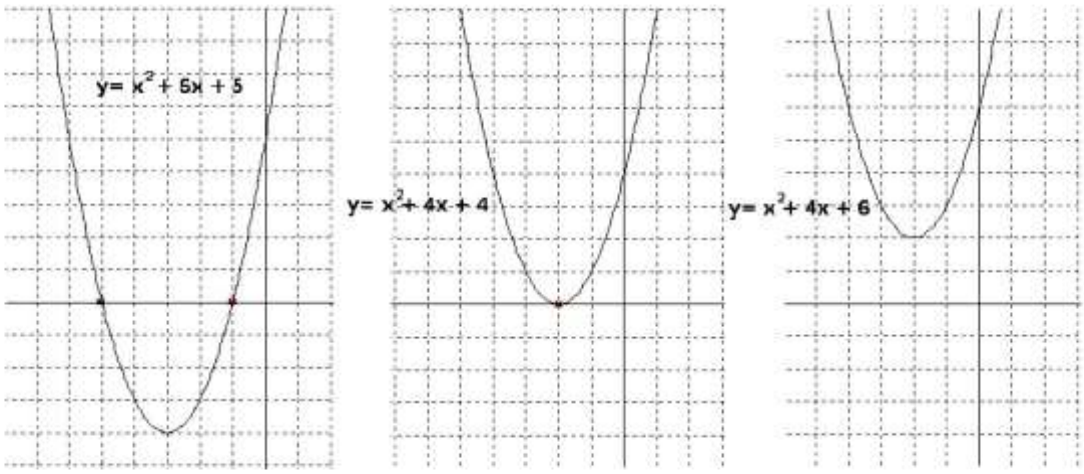
Dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$

Un punto de corte: $(x_1, 0)$ si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$

Ningún punto de corte si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$

La 2ª coordenada siempre será cero.

En la siguiente imagen vemos un ejemplo de cada una de estas tres situaciones.



Observa que:

- $6^2 - 4.1.5 = 36 - 20 = 16 > 0$
- $4^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$
- $4^2 - 4.1.6 = 16 - 24 = -8 < 0$

Para saber cuál es el valor de x para esos puntos de corte resolvemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) Puntos de corte con el eje OY. Para hallarlo sustituimos las x por un cero → **x = 0** y calculamos el valor de **f(0).** La 1ª coordenada siempre será cero, (0,x). Otro modo es tomar el valor de "c", lo cual nos da el punto (0,c).

5.3. Ejemplo

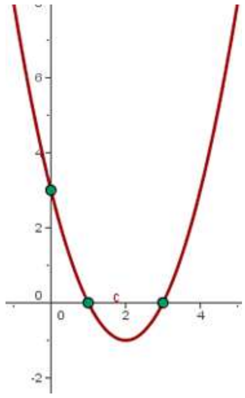
Representar la función **f(x) = x² - 4x + 3**

1. Vértice. x = - (-4) / 2 = 2 y = 2² - 4· 2 + 3 = -1 **V(2, -1)**

2. Puntos de corte con el eje OX. x² - 4x + 3 = 0

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \frac{x_1 = 3}{x_2 = 1}$$ **(3, 0) (1, 0)**

3. Punto de corte con el eje OY. Si vemos la gráfica resultante el punto de corte es **(0, 3)** que es el valor que toma la "c" en la función.



4. Si resulta que no hay puntos de corte con el eje OX calcularíamos otros puntos, para ello se darían varios valores a la x alrededor del vértice, obteniendo la y correspondiente.

Ejemplo: $y = x^2 + 4x + 6$

1) V → x_v = -4/2 = -2; y = $(-2)^2$ + 4(-2) + 6 = 4 – 8 + 6 = 2

2) $x^2 + 4x + 6 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{2}$$ sin solución → no hay puntos de corte con el eje x

3) Punto de corte eje OY: (0,6)

4) Vamos a calcular algún punto más a la derecha e izquierda del vértice. V(-2,2)

Ej: x = -1 → y = 11

x = -3 → y = 27

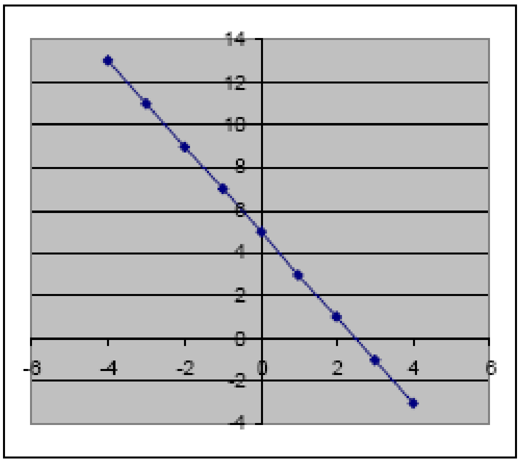
5.4. Ejemplos de la funciones cuadráticas en la realidad.

El puente Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de 2 enormes cables que miden 3 pies de diámetro: el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra aproximadamente a 220 pies del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente.

Las parábolas están presentes en multitud de situaciones cotidianas, construcciones e imágenes por todo el mundo.

EJERCICIOS

1. Dada la siguiente gráfica indica cual es su función:



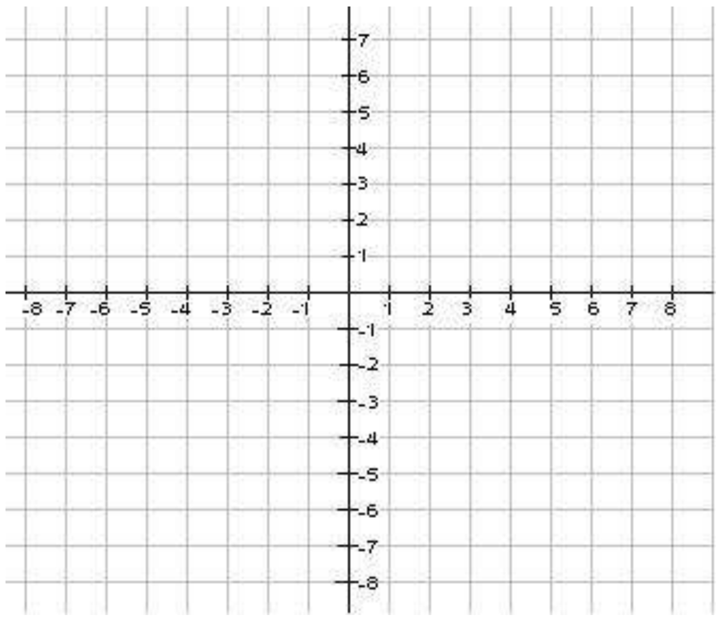
a. Y = - 2x - 2

b. Y = 4X+5

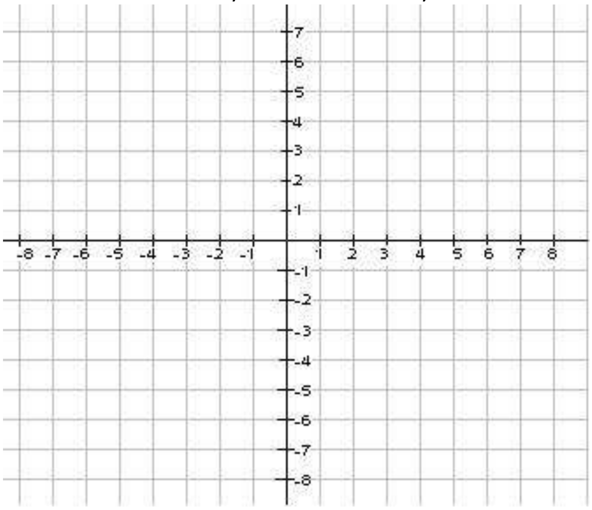
c. Y = - 2x +5

d. Y = - 2x+2

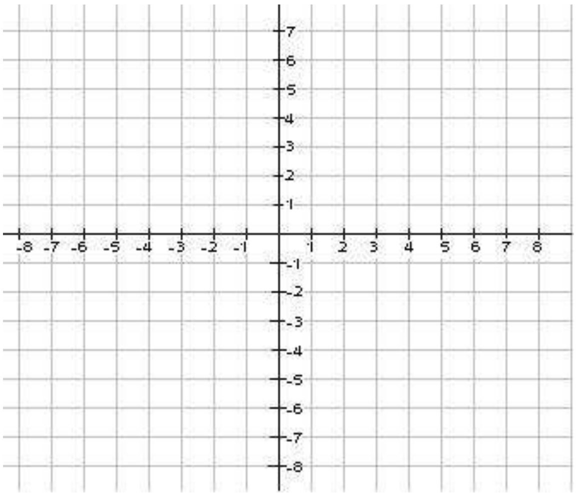
2. Representa las funciones constantes: a) y = 2 b) y = -2



3. **Representa las rectas verticales:** a) $x = 0$ b) $x = -5$



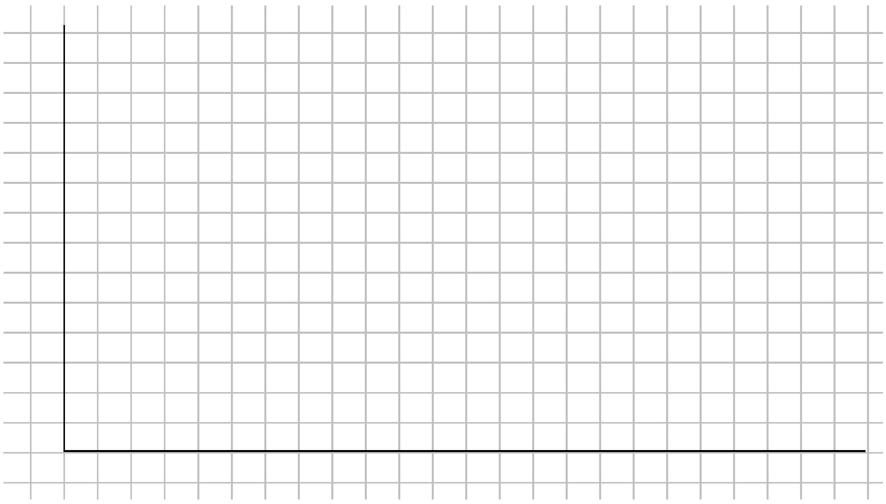
4. **Representa las funciones afines:** a) $y = -2x - 1$ b) $y = \frac{1}{2}x - 1$



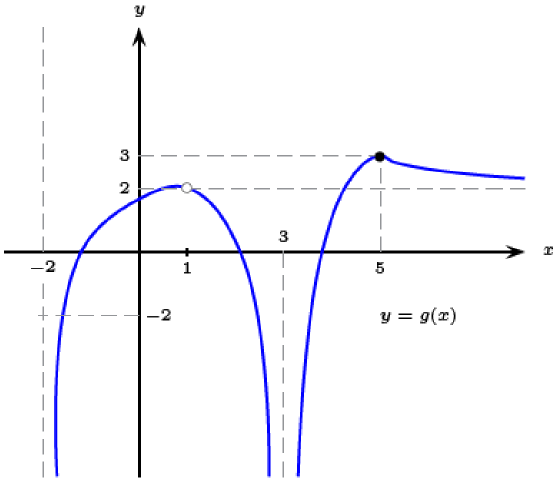
X	Y
2	
1	
0	
-1	
-2	

X	Y
2	
1	
0	
-1	
-2	

5. **En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función afín que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.**



6. Hallar el dominio y recorrido de la siguiente función.



7. Hallar el dominio de las siguientes funciones polinómicas, racionales y con raíces.

A. f(x) = $34x^4 - 5x^2 + 11x \ -6$

B. f(x) = $\dfrac{2x^2}{-3x+18}$

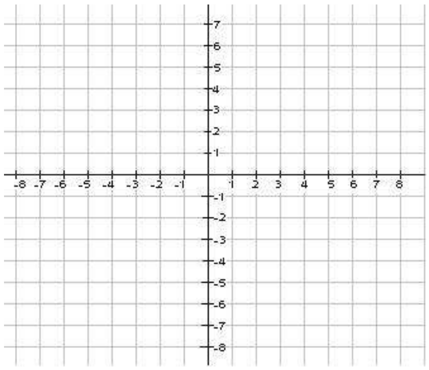
C. f(x) = $\sqrt{x-5}$

8. ¿Cuál es el vértice de la parábola y = $3x^2$ +10X-5?

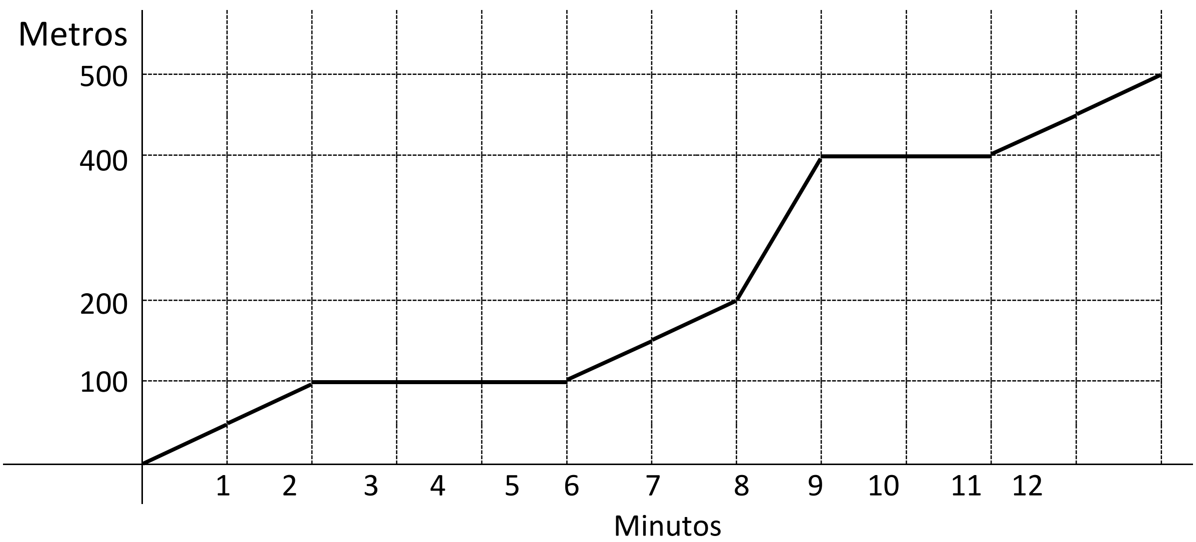
9. Indica sin dibujarla en cuántos puntos cortan el eje x la parábola x^2 –x +3.

10. Representa gráficamente la siguiente función: El precio de un aparcamiento en el que nos cobran 200 euros la primera hora y 150 euros más cada hora.

11. Dibuja una parábola que tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2) y (4,3).



12. La siguiente gráfica representa la distancia recorrida y el tiempo empleado por Ana en ir desde su casa hasta el lugar de trabajo.

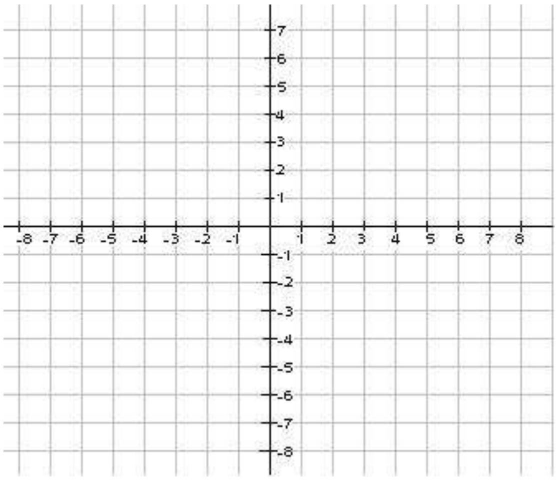


A. Indica la longitud del recorrido realizado por Ana
B. ¿Cuántas veces se para Ana a lo largo del recorrido y de cuánta duración?
C. ¿Cuál es el periodo de tiempo en el que Ana camina más deprisa?

13. Representa en una misma gráfica las funciones:

a) $y = -2x^2$ b) $y = -2x^2 + 3$ c) $y = -2x^2 - 1$

¿Cuál es el vértice de cada una de ellas?



14. Observa las siguientes gráficas y resuelve:

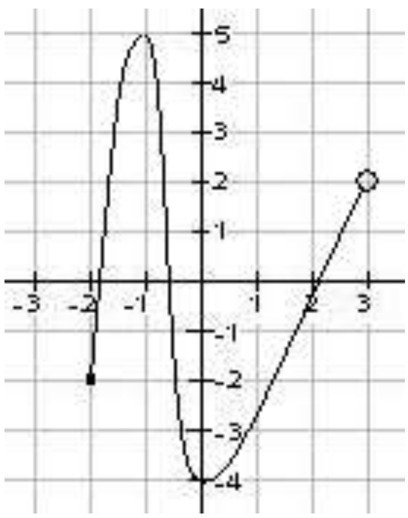
A. Dominio y recorrido

B. Continuidad y discontinuidad

C. Crecimiento y decrecimiento

D. Máximos y mínimos relativos y absolutos

E. Puntos de corte con los ejes



Dom:

Rec:

Continua:

Disc:

Crec:

Decrec:

Max abs:

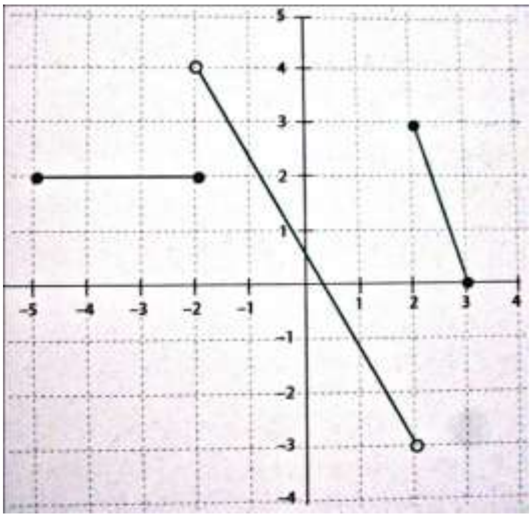
Max relat:

Min abs:

Min relat:

Puntos corte eje x:

Punto corte eje y:



Dom:

Rec:

Continua:

Disc:

Crec:

Decrec:

Max abs:

Max relat:

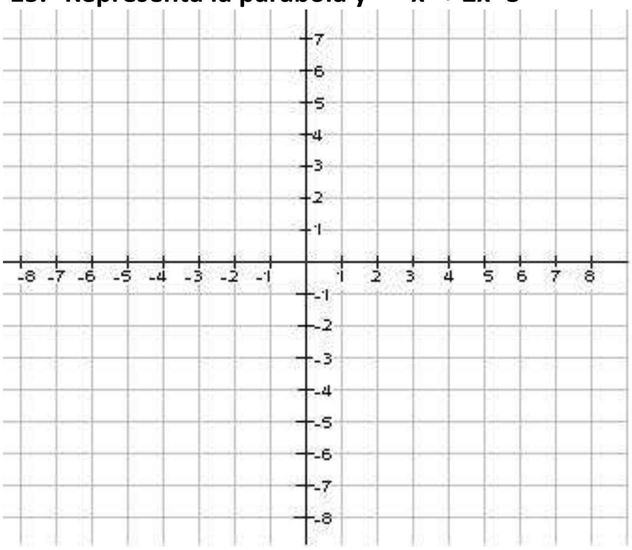
Min abs:

Min relat:

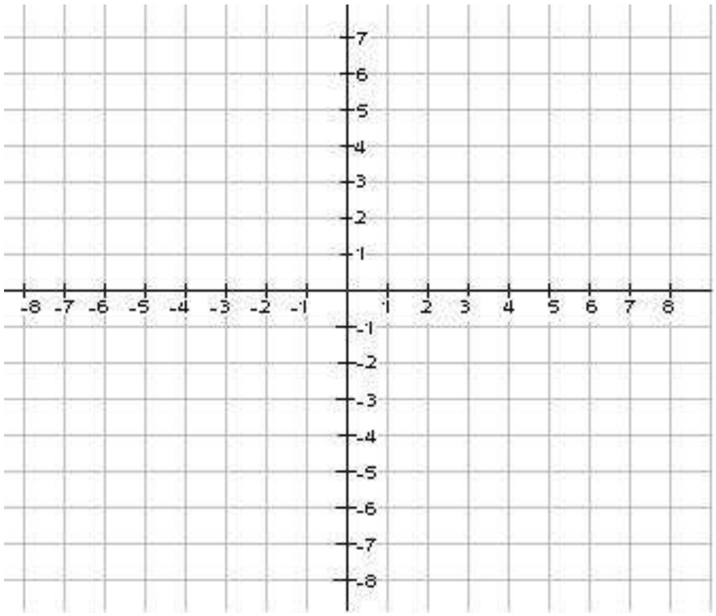
Puntos corte eje x:

Punto corte eje y:

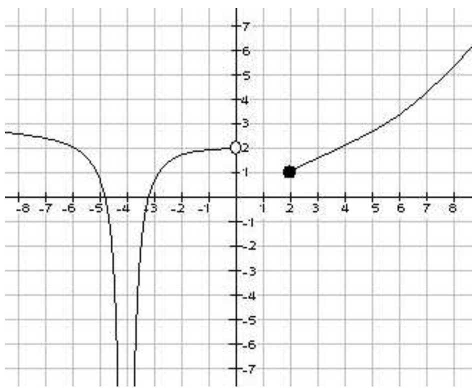
15. Representa la parábola $y = -x^2 + 2x - 3$



16 Representa la siguiente función: y = – x + 2,5



17 ¿Cuál de los dominios y recorridos corresponden a la gráfica?.



a. Dom: (- ∞, -4)U(-4,0]U[2, ∞) y Rec: (- ∞, ∞)

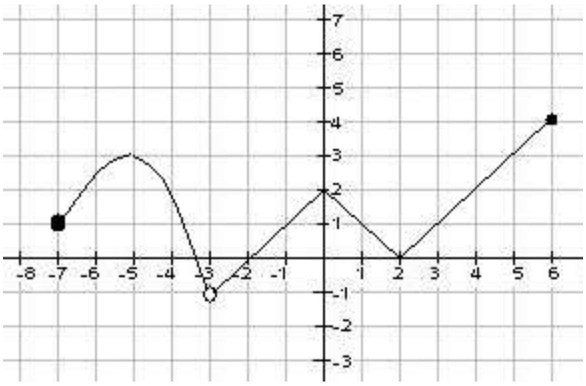
b. Dom: (- ∞, -4)U(-4,0)U[2, ∞) y Rec: (- ∞, ∞)

c. Dom: (- ∞, -4)U(-4,2)U[2, ∞) y Rec: (- ∞, 1)U(2, ∞)

d. Dom: (- ∞, -4]U(-4,2)U(2, ∞) y Rec: (- ∞, 1)U(2, ∞)

e. Ninguna de las anteriores

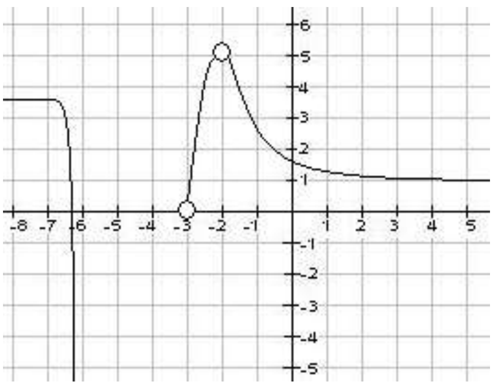
18 ¿Cuál es el máximo absoluto y el mínimo relativo de la siguiente función?.



19 Indica cuáles son los intervalos crecientes y decrecientes de la gráfica del ejercicio anterior.

a. Creciente: (-7,-5)U(-3,2)U(2,6) Decreciente: [-5,-3)U[0,2]
b. Creciente: (-7,-5)U(-3,0)U(2,6) Decreciente: (-5,-3)U(0,2)
c. Creciente: (-7,-5), (-3,0), (2,6) Decreciente: (-5,-3)U(0,2)
d. Creciente: [-7,-5]U(-3,0]U[2,6] Decreciente: [-5,-3)U[0,2]
e. Ninguna de las anteriores

20 ¿Cuál de los dominios y recorridos corresponden a la gráfica?.

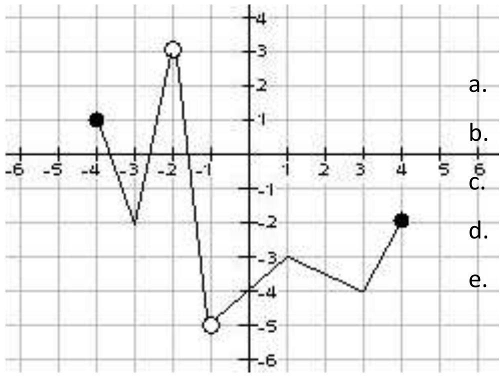


a. Dom: (- ∞, -6)U(-3, ∞) y Rec: (- ∞,5)
b. Dom: (- ∞, -6)U(-3,-2)U(-2, ∞) y Rec: (- ∞,0)U(0,5)
c. Dom: (- ∞, -6)U(-3,-2)U(-2, 4) y Rec: (-3,5)
d. Dom: (- ∞, -6)U(-3,-2)U(-2, ∞) y Rec: (- ∞,5)
e. Dom: (- ∞, -6),(-3,-2),(-2, ∞) y Rec: (- ∞,0)U(0,5)

21 Hallar el dominio de la función f(x) = $\dfrac{2x-7}{-x-2}$

a) R – {2} b) [2, ∞) c) (-∞, -2] d) R – {-2}

22 ¿Cuál es el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la siguiente función?



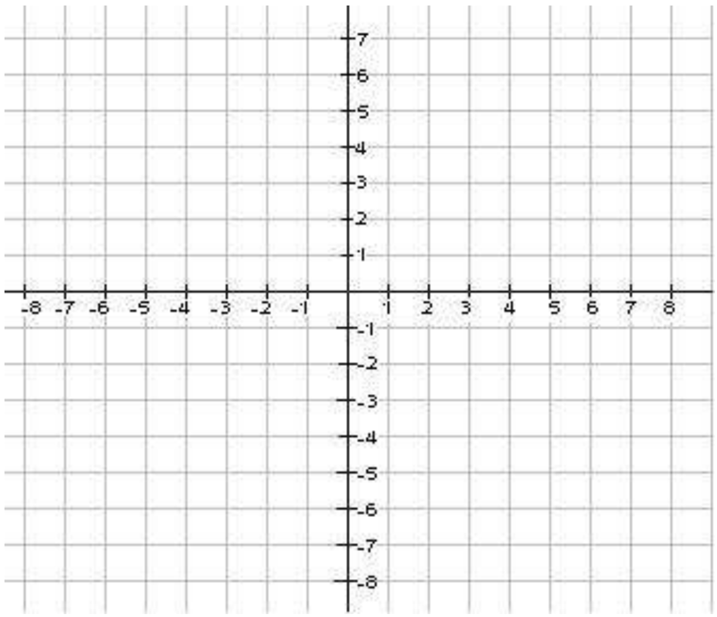
a.	Máx abs: (-2,3)	Min abs: (1,-5)
b.	Máx abs: No existe	Min abs: (1,-5)
c.	Máx abs: (-2,3)	Min abs: No existe
d.	Máx abs: No existe	Min abs: No existe
e.	Máx abs: (0,-7),(6,2)	Min abs: (-6,-4)

23 Indica cuáles son los intervalos crecientes y decrecientes de la gráfica del ejercicio anterior

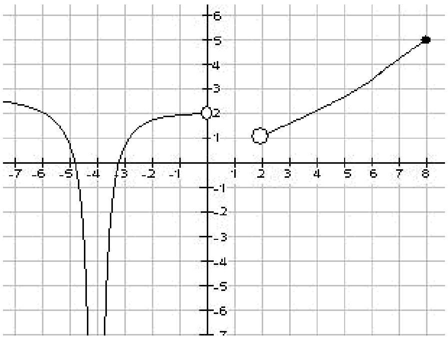
a.	Crec: [-3,-2) U [-1,1] U [3,4]	Decrec: [-4,-3) U (-2,-1) U [1,3]
b.	cCrec: (-3,-2) U (-1,1) U (3,4)	Decrec: (-4,-3) U (-2,-1) U [1,3]
c.	Crec: (-3,-2) U (-1,1) U (3,4)	Decrec: (-4,-3), (-2,-1), (1,3)

d. Ninguna de las anteriores

24. Representa la siguiente función: y = –2x + 2,5



25. ¿Cuál de los dominios y recorridos corresponden a la gráfica?.



a. Dom: (- ∞, -4)U(-4,0]U[2, ∞) y Rec: (- ∞, ∞)

b. Dom: (- ∞, -4)U(-4,0)U(2, 8) y Rec: (- ∞, 5)

c. Dom: (- ∞, -4)U(-4,2)U(2, 8) y Rec: (- ∞, 1)U(2,∞)

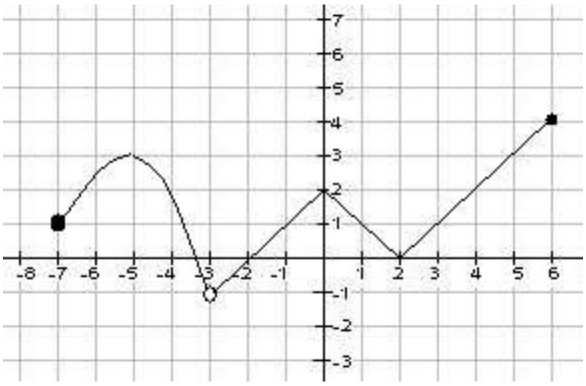
d. Dom: (- ∞, -4)U(-4,2)U(2, ∞) y Rec: (- ∞, 5)

e. Ninguna de las anteriores

26. Hallar el dominio de la función f(x) = $\sqrt{x-5}$

a) $[5,+\infty)$ b) $(5,+\infty)$ c) (-∞, 5] d) R – {5}

27. ¿Cuál es el máximo relativo y el mínimo absoluto de la siguiente función?



a. Máx relativo: (0,2) Min absoluto: (2,0)

b. Máx relativo: (0,2)U(-5,3) Min absoluto: (2,0)

c. Máx relativo: (0,2),(-5,3) Min absoluto: No existe

d. Máx relativo: No existe Min absoluto: No existe

e. Ninguna de las anteriores

28. Indica cuáles son los intervalos crecientes y decrecientes de la gráfica del ejercicio anterior.

a. Creciente: [-7,-5]U(-3,0]U[2,6] Decreciente: (-5,-3)U(0,2)

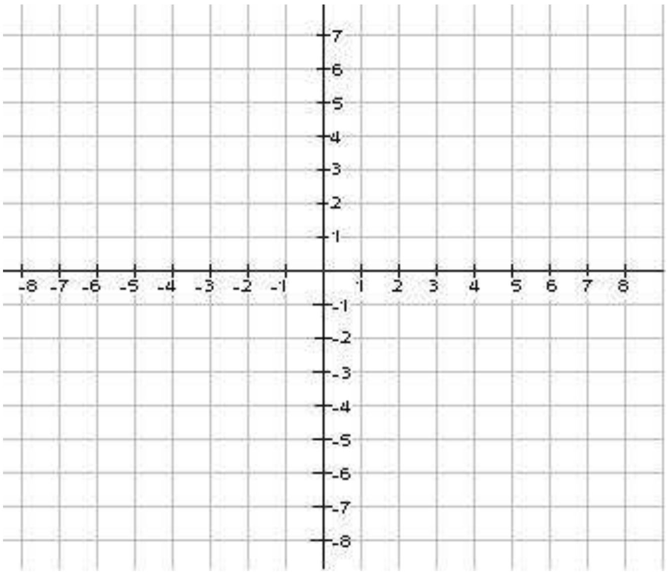
b. Creciente: (-7,-5)U(-3,0)U(2,6) Decreciente: [-5,-3)U[0,2]

c. Creciente: (-7,-5)U(-3,2)U(2,6) Decreciente: (-5,-3)U(0,2)

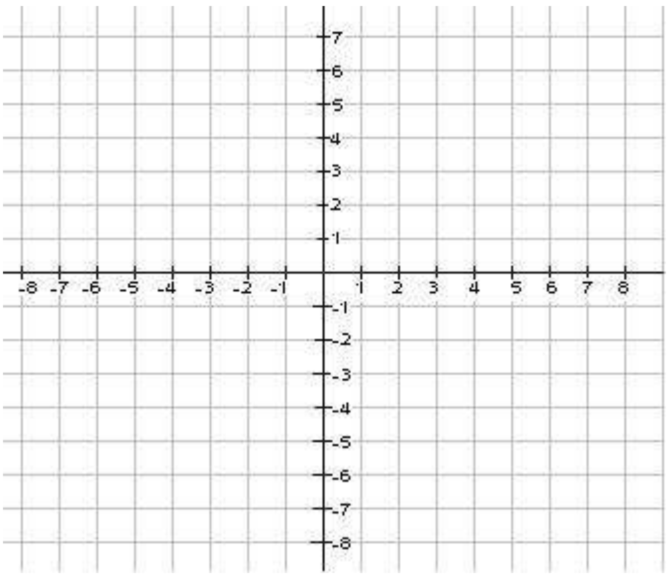
d. Creciente: (-7,-5), (-3,0), (2,6) Decreciente: [-5,-3)U[0,2]

e. Ninguna de las anteriores

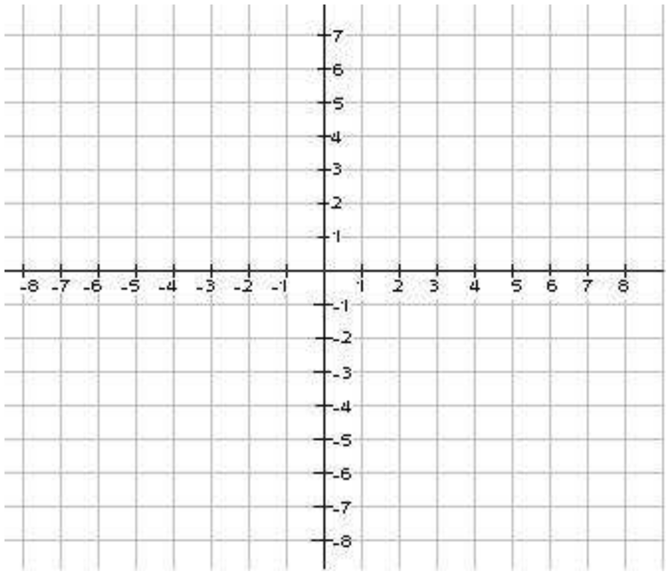
29. Representa la siguiente función: $f(x) = x^2 + 4x - 5$



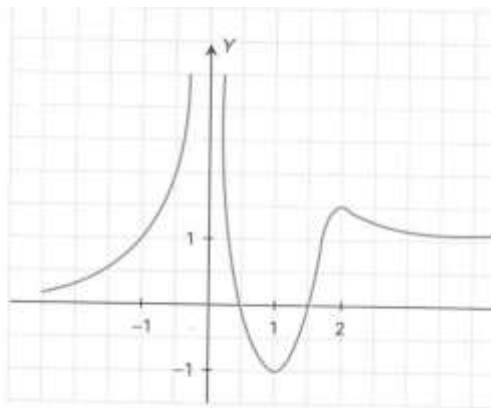
30. Representa la siguiente función: $f(x) = -4x^2 + 2x + 2$



31. Representa la siguiente función: $f(x) = x^2 + 2x - 2$



32. Indica el dominio, recorrido, coordenadas de los puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos de las función.



33. Esboza la gráfica de la función que se ajusta a las siguientes condiciones:

a) El dominio y la imagen son todos los números reales

b) Tiene un máximo en (-2, 4)

c) Tiene un mínimo en (3, -5)

34. Esboza la gráfica de la función que se ajusta a las siguientes condiciones:

a) El dominio es (-∞, 5)

b) La imagen o recorrido es todo R

c) Corta a los ejes en los puntos (-5, 0), (0, 3), (2, 0) y (4, 0)

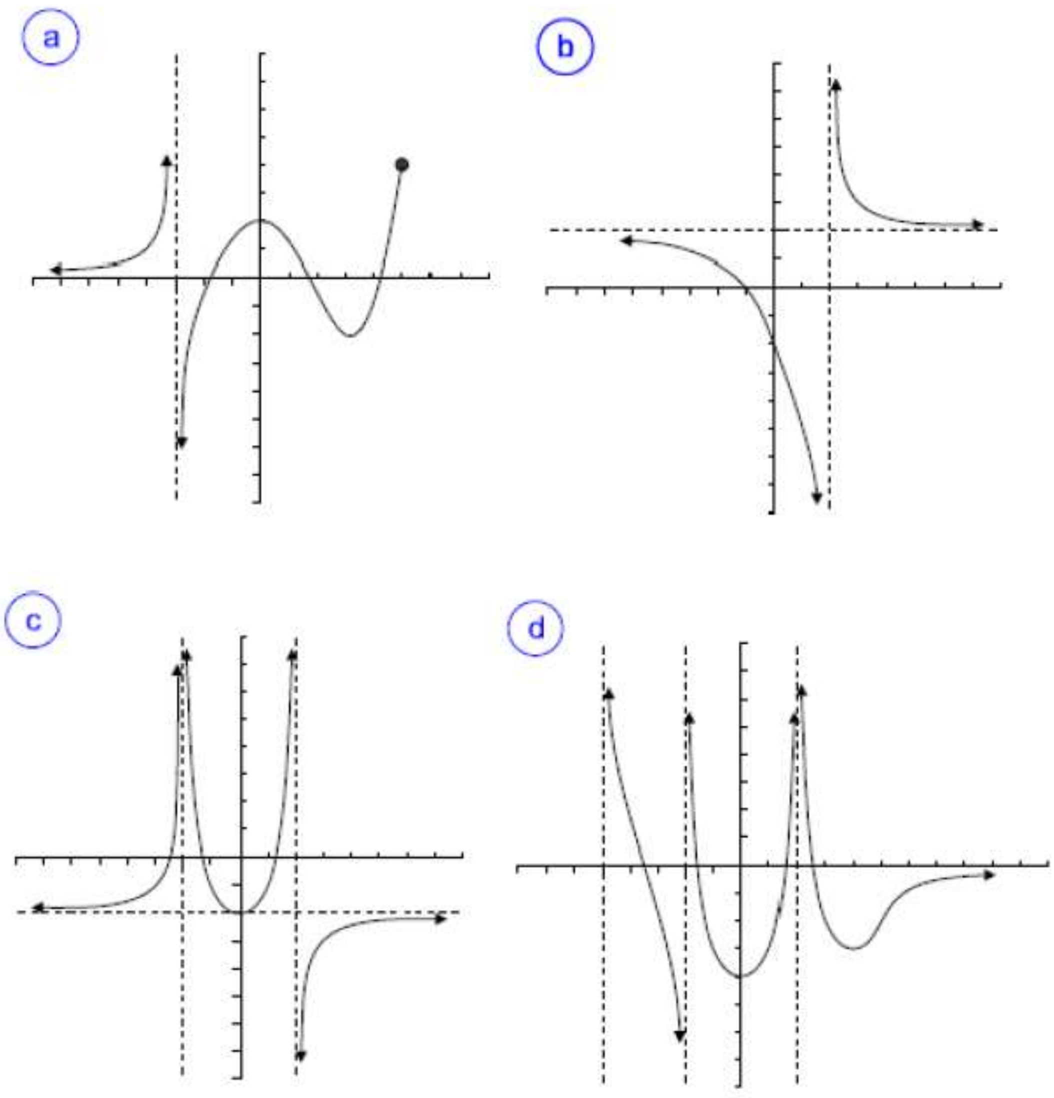
d) Alcanza un máximo en el punto (-1, 4)

e) Alcanza un mínimo en (3, -2)

f) Tiene una asíntota vertical en x=5, es decir nunca llega a alcanzar el valor x=5.

g) Cuando “x” es un poco menor que 5 la “y” vale + ∞.

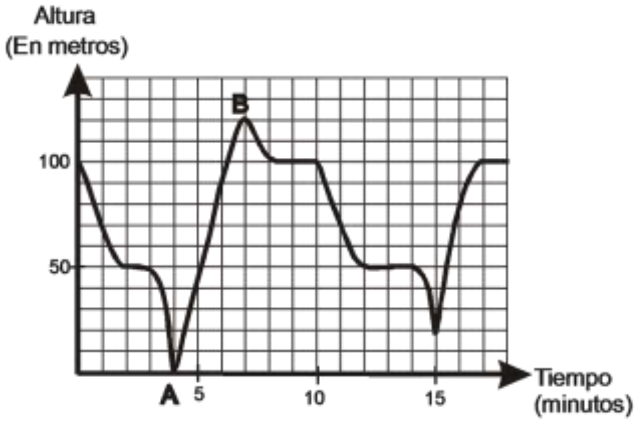
35. Estudia las siguientes gráficas:



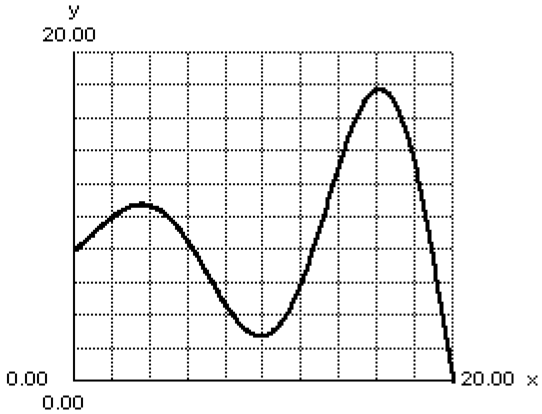
36. Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: A las 0 horas, la temperatura de una casa es de 15 ºC y, por la acción de un aparato que controla la temperatura, permanece así hasta las 8 de la mañana. En ese momento se enciende la calefacción y la temperatura de la casa va creciendo hasta que, a las 14:00 h, alcanza la temperatura máxima de 25 ºC. paulatinamente, la temperatura disminuye hasta el momento en que se apaga la calefacción a las 10 de la noche, volviendo a coincidir con la que había hasta las 8:00 horas.

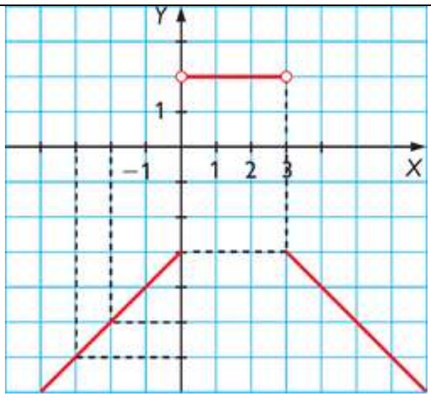
37. Estudia el dominio, recorrido, máximos y mínimos, crecimiento, continuidad, etc. de las siguientes funciones

a)



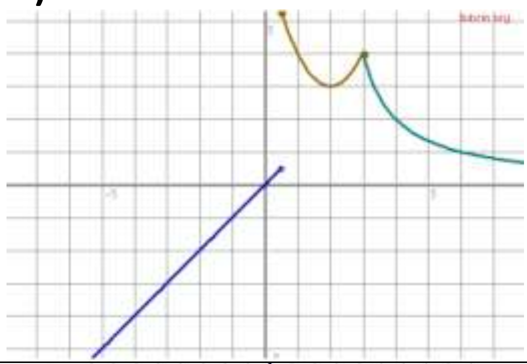
B)

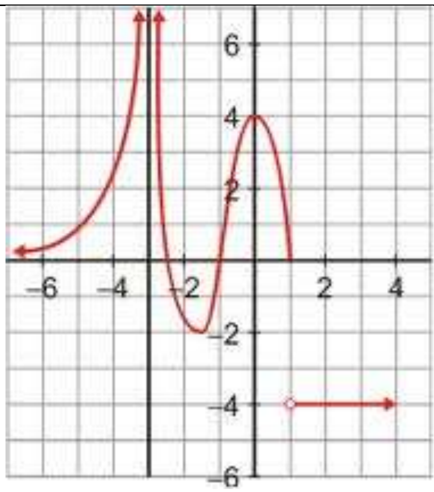




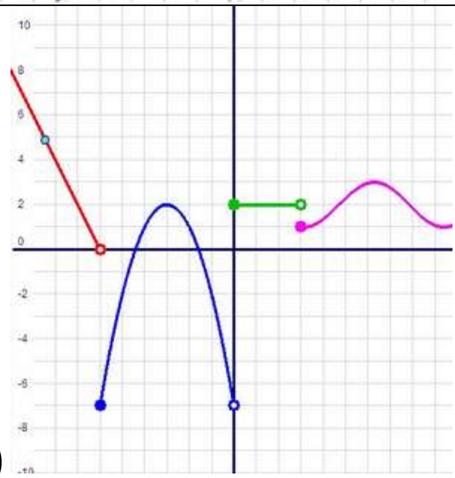
C)

D)





E)



F)