Tema 5. Monomios y polinomios

1. Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones para reflejar de forma generalizada la relación que existe entre varias magnitudes y poder realizar un cálculo de esa relación en función de los valores que tomen las diferentes magnitudes.

Ejemplos:

Suma de cuadrados: $\mathbf{a^2 + b^2}$
Triple de un número menos doble de otro: **3x - 2y**
Suma de varias potencias de un número: $\mathbf{a^4 + a^3 + a^2 + a}$

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por número y se realiza la operación indicada se obtiene un número que es el "**valor numérico**" de la expresión algebraica para los valores de las letras dados.

$$P(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2$$
$$x = -2 \qquad y = -3$$
$$2(-2)^2 + 3(-3)^2$$
$$2(4) + 3(9) =$$
$$8 + 27 = 36$$

2. Monomios

Si se observan las siguientes expresiones algebraicas se verá que en ellas aparecen distintas operaciones:

Ejemplo.- 1) $3ax$; 2) $-2xy^2$; 3) $8ab^3x$

En estas expresiones no aparecen sumas/restas entre términos, siendo por ello denominadas **monomios**. Podemos por tanto decir que:

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Se llama **coeficiente** de un monomio al número que aparece multiplicando a las letras. Normalmente se coloca al principio. **Si es un 1 no se escribe** y **nunca es 0** ya que la expresión completa sería 0. En los tres ejemplos de monomios anteriores los coeficientes son 3 ; -2 ; y 8 respectivamente.

Se llama literal de un **monomio** a las letras, con sus correspondientes exponentes y se denomina **grado** de un monomio a la suma de los exponentes de las letras. De este modo los tres monomios anteriores serán: el 1) de grado 2, el 2) de grado 3, el 3) de grado 5 (como es sabido cuando el exponente es 1 no se escribe).

Por ejemplo: $-2x^2$; $3x$; $-5x^3$; x^5 son cuatro monomios de grados 2, 1, 3 y 5.
Ejemplos:

Monomio	***Coeficiente***	***Literal***	***Grado***
$3axy^2$	3	axy^2	4
$-5z^3$	-5	$-5z^3$	3
$-4x$	-4	x	1
x^3y^3	1	x^3y^3	6

2.1. Monomios semejantes

Son **monomios semejantes** entre sí aquellos que tienen la misma parte literal con los mismos exponentes.

Ejemplo.- Son monomios semejantes: $\mathbf{2ax^4y^3}$; $\mathbf{-3ax^4y^3}$; $\mathbf{ax^4y^3}$; $\mathbf{5ax^4y^3}$

Mientras que por ejemplo no son semejantes a los anteriores: $\mathbf{axy^3}$; $\mathbf{3a^2x^4y^3}$; $\mathbf{2bx^4}$

2.2. Suma y resta de monomios

Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes. La **suma o resta** es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Ejemplos.-

1) $5ax^4y^3 - 2ax^4y^3 = 3ax^4y^3$

2) $2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4 = 7ax^4 - 3ax^4 = 4\ ax^4$

3) $2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x = 6x^3 + x$

2.3. Producto de monomios

Para multiplicar monomios se debe recordar el producto de potencias que, como sabemos se puede realizar si tienen la misma base. Por ejemplo $\mathbf{5x^2 \cdot 3x^4 = 15x^6}$ ya que **"Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes"**

Para **multiplicar monomios** por tanto se multiplican los coeficientes de cada uno entre si y las potencias que tengan la mima base de cada uno, dejando las de distinta base como estén.

Ejemplo.- Calcular el producto de los siguientes monomios: $\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3}$. Se procede de la siguiente forma:

- Se multiplican los **coeficientes**: 4, 1 y 3 respectivamente. Resultado: **12**
- Se multiplican todas las **potencias de base a (sumando los exponentes)**. Resultado: $\mathbf{a^2}$
- Se multiplican todas las **potencias de base b**. Resultado: $\mathbf{b^2}$
- Se multiplican todas las **potencias de base x**. Resultado: $\mathbf{x^6}$
- Se multiplican todas las **potencias de base y**. Resultado: $\mathbf{y^7}$
- Resultado final: $\mathbf{4ax^4y^3 \cdot x^2y \cdot 3ab^2y^3 = 12a^2b^2x^6y^7}$

2.4. División de monomios

La división de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente la división de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tengan la misma base (restando los exponentes por tanto).

Ejemplo:

$$-8x^5 \div -4x^2 = 2x^3 \quad \text{ó} \quad \frac{-8x^5}{-4x^2} = 2x^3$$

3. Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier suma de monomios no semejantes.

Ejemplo.- Son polinomios las expresiones siguientes:

a) $\mathbf{4ax^4y^3 + x^2y + 3ab^2y^3}$

b) $\mathbf{4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

En el primer caso el polinomio consta de la suma de tres monomios, cada uno de ellos es un **término** del polinomio, luego tiene tres términos., cada uno con varias letras, mientras que en el segundo caso el polinomio tiene 5 términos. Si un término sólo consta de un número se le llama **término independiente** (5 en el caso b y no existe en el caso a)

- Cuando un polinomio consta de dos monomios se denomina **binomio**:
  $x^2y + 3ab^2y^3$ o $2x + 3$ son dos binomios

- Cuando consta de tres monomios se denomina **trinomio** ($-2x^3 + 3x^2 + 5$)

- Con más de tres términos (monomios) ya se denomina en general polinomio.

Respecto al **grado** de un polinomio, se dice que tiene por grado el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Así en el **caso a)** los grados de los monomios (suma de los exponentes de las letras) son 8, 3 y 6, luego el **grado del polinomio es 8**. En el **caso b) el grado es 4**.

Los números que acompañan como factores a las letras (coeficientes de los monomios), se llaman también **coeficientes** del polinomio: 4 , -2 , 3 , -2 , y 5 respectivamente en el caso b).

"Lo más habitual que nos vamos a encontrar son polinomios del tipo del caso b), por tanto con una sola letra, que habitualmente será la x".

En este caso a la letra se le suele llamar variable.

3.1. Suma y resta de polinomios

La suma de polinomios se basa en la de monomios ya vista en este tema. Se podrán sumar los términos (monomios) que sean semejantes de los polinomios objeto de la suma.

Ejemplo.- Para calcular la suma de los polinomios:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$

Basta **sumar** los términos de grados 3, 2 y 1 de ambos polinomios y dejar el resto de los términos del primero como está.

Podemos indicar la suma de la siguiente forma para verla mejor:

$$\begin{array}{rl} & 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \\ + & \quad\;\; 5x^3 - x^2 + 2x \\ \hline & 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 \quad + 5 \end{array}$$

Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del segundo y sumar los resultados.

Ejemplo.- Para calcular la diferencia o resta de los dos polinomios anteriores:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)$

Se calcula la suma:

$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (-5x^3 + x^2 - 2x) = 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$

3.2. Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de unos por todos los del otro y sumar los resultados. ("Atención especial al producto de potencias de la misma base").

En el caso en que ambos polinomios consten de varios términos, se puede indicar la multiplicación de forma semejante a como se hace con número de varias cifras, cuidando de situar debajo de cada monomio los que sean semejantes. En la siguiente imagen se puede ver el producto de dos polinomios de varios términos.

Ejemplo.-

$$\begin{array}{rrrrr} & 2x^3 & -3x^2 & & +1 \\ & & & 2x & -3 \\ \hline & -6x^3 & +9x^2 & & -3 \\ 4x^4 & -6x^3 & & +2x & \\ \hline 4x^4 & -12x^3 & +9x^2 & +2x & -3 \end{array}$$

En la práctica no suele indicarse la multiplicación como en esta imagen, sino que suelen colocarse todos los términos seguidos y sumar después los que sean semejantes. Así:

Ejemplo.-

$(-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(x + 1) = (-2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) =$

$= -2x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 5$

3.3. División de polinomios

La división de polinomios, en general se realiza de forma semejante a la de números de varias cifras, aunque las operaciones que realizamos rápidamente con los números, con los polinomios las vamos indicando. Veamos el proceso para dividir dos polinomios con un ejemplo:

$(2x^3 + 3x - 2) : (x - 3)$

- Buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado $2x^3$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad +3x-2 & x-3 \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

- Multiplicamos x-3 por el monomio $2x^2$, y restamos el resultado:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad + \quad 3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado $6x^2$, y multiplicamos x-3 por ese monomio, restando de nuevo el resultado:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + \quad 3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+6x \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \\ \; -6x^2 \;\; 18x & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 21x-2 & \end{array}$$

- Por último, buscamos un monomio que al multiplicar por x de como resultado 21x, y repetimos el proceso:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 \quad +3x-2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+6x+21 \\ \cline{1-1} \quad 6x^2+3x-2 & \\ \; -6x^2+18x & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 21x-2 & \\ \qquad -21x+63 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 61 & \end{array}$$

- El resultado es: cociente = $2x^2 + 6x + 21$ y resto = **61**

3.4. Igualdades notables

Se denominan así a algunas operaciones con polinomios de especial interés ya que aparecerán frecuentemente en los cálculos. Las más usuales son:

Cuadrado de un binomio: suma $\mathbf{(a + b)^2}$ o diferencia $\mathbf{(a - b)^2}$

Naturalmente realizar un cuadrado es multiplicar el binomio por sí mismo, luego:

$$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$$

"El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo "

De modo similar:

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ **(igual que antes pero cambiando el signo central).**

"En cualquier caso se debe tener en cuenta que el primer término "a" también puede ser negativo y por tanto cambiar el signo central". "En general se puede considerar siempre como una suma y para cada término asignarle el signo que le preceda (ver ejemplo)"

Ejemplo.-

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $(-x + 3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Suma por diferencia: se refiere al producto de la suma de dos monomios por la diferencia de ellos mismos:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$$

Siempre recordamos que " **suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados"**.

Tema 5. Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$8x^2$			
$5\ ab^4c^2$			
x^2y			
$\frac{3}{4}p^2\,q\,r$			
$\frac{5}{7}$			

2. Dados los monomios del ejercicio 1, calcula sus valores numéricos si x = -2, a = 1, b = -3, c = 2, y =4, p = -1, q = -3, r = 7

3. Calcula las siguientes operaciones de monomios:

$2x^2 + 7x^2 - 3x^2 =$

$\frac{1}{2}xy + 3x^2y - \frac{2}{5}xy + 5x^2y =$

$(-7b) \bullet (3b^4) \bullet (2b^2) =$

$a \bullet (-4ab) \bullet (-3b) =$

$(24a^6) : 2a^2 =$

$(-15x^5) : 2x^2 =$

4.- Dados los polinomios:

$P(x) = 3x^2 - x + 6$

$Q(x) = x^2 + 7x - 1$

$R(x) = -4x^2 + 2x + 5$

$S(x) = x - 1$

Realiza las siguientes operaciones:

a. P(x)+R(x) =
b. Q(x)-R(x) =
c. P(x)• S(x) =

5.-Enlaza, sin hacer la operación, las siguientes igualdades notables con sus desarrollos:

a. $(x+2)^2$ =	x^4+6x+9	(1
b. $(x^2+3)^2$ =	x^4-x^2	(2
c. $(x+(-4))^2$ =	x^4-6x+9	(3
d. $(x-5)^2$ =	$x^2-8x+16$	(4
e. $(x^2-3)^2$ =	x^2+4x+4	(5
f. $(x+2)\bullet(x-2)$=	x^2-4	(6
g. $(x^2+x)\bullet(x^2-x)$=	$x^2-10x+25$	(7