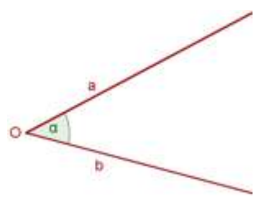
Tema 13. Trigonometría

1. Medida de ángulos

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice.

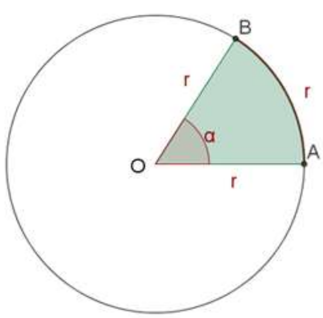


El ángulo es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario.

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

<u>Grado sexagesimal (°)</u>: Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal. Un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos ('').

<u>Radián (rad):</u> Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.



2π rad = 360° π rad = 180°

Para pasar de grados a radianes (¿30º $\longrightarrow$ rad?):

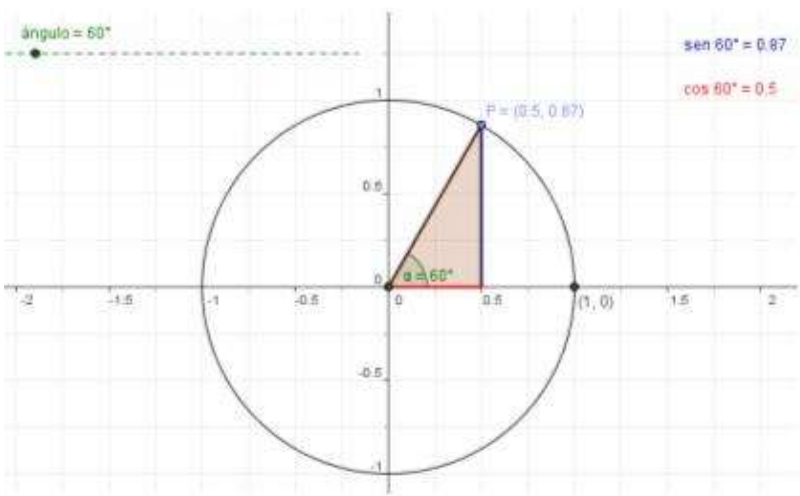
$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180°}{30°} \qquad \alpha = \frac{30°\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}\,rad$$

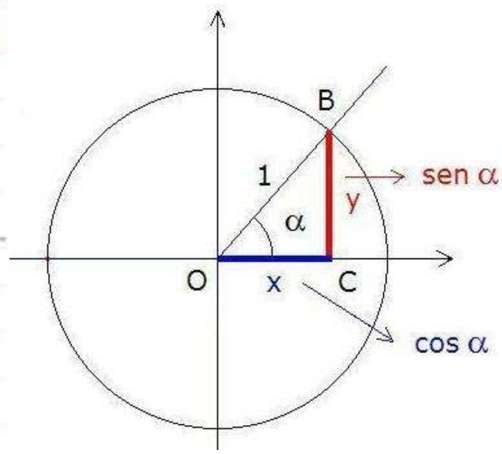
Para pasar de radianes a grados (¿ π/3 rad $\longrightarrow$ º?):

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180°}{\alpha} \qquad \alpha = \frac{180° \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180°}{3} = 60°$$

2. Razones trigonométricas

Para entender las razones trigonométricas, partimos de la circunferencia goniométrica: es una circunferencia de longitud de radio 1, sobre unos ejes XY. Sobre ella, podemos trazar ángulos que formarán al proyectarlos sobre los ejes un triángulo rectángulo.



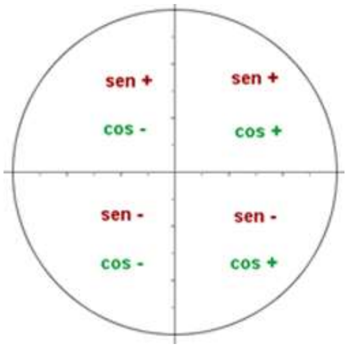


El seno del ángulo será la proyección del ángulo sobre el eje Y, el coseno del ángulo será la proyección sobre el eje X, y la tangente será el cociente resultante de dividir seno por coseno. En el ejemplo, podemos ver que el punto P (donde se cortan la semirrecta del ángulo y la circunferencia), tiene como coordenadas X=0,5 (que es el valor del coseno) e Y=0,87 (que es el valor del seno).

En este vídeo puedes entender el concepto de seno y coseno:

https://www.youtube.com/watch?v=gnlQdk_rb4s

Como el radio es 1, eso implica .que tanto el seno como el coseno siempre van a tener un valor entre -1 y +1 (incluidos). Es decir, tanto el seno como el coseno de cualquier ángulo estarán en el intervalo [-1,1]



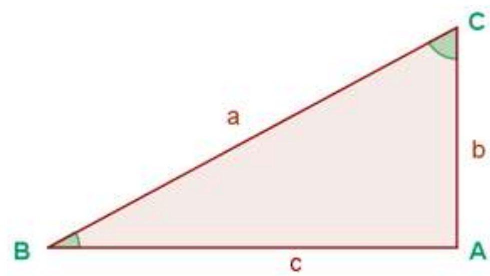
α :	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0
tg	0	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow -\infty$

3. Razones trigonométricas de ángulos agudos en un triángulo rectángulo

<u>**Seno del ángulo B**</u>: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **sen B**.

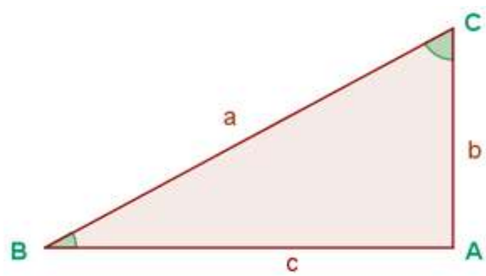
$$\text{sen B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$



<u>**Coseno del ángulo B**</u>: es la **razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa**.

Se denota por **cos B**.

$$\cos \text{B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$



<u>**Tangente del ángulo B**</u>: es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo**.

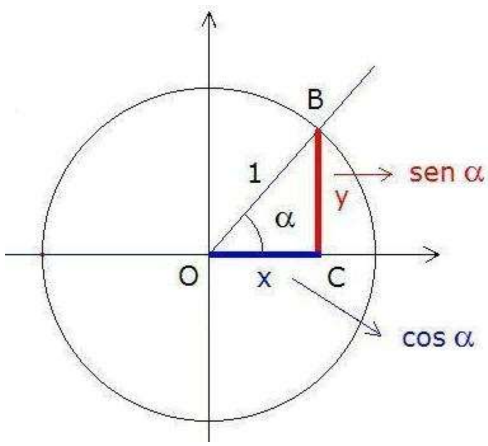
Se denota por **tg B**.

$$\text{tg B} = \frac{\text{sen B}}{\cos \text{B}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$$

4. Fórmula Fundamental: Identidades notables trigonométricas

La fórmula fundamental de la trigonometría es: $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$

Esta propiedad se verifica por el teorema de Pitágoras que dice que la suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado. Si observamos en la circunferencia goniométrica en la siguiente figura, vemos que el triángulo que forman OB, x e y es rectángulo. La hipotenusa es OB, cuya longitud es 1, ya que corresponde al radio de la circunferencia goniométrica, el cateto x corresponde al coseno del ángulo, mientras que el cateto y corresponde al seno del ángulo. Por tanto, la suma de los catetos al cuadrado (es decir, el coseno al cuadrado más el seno al cuadrado), corresponde a la hipotenusa al cuadrado (y como la hipotenusa es 1, su cuadrado también es 1).



$$\mathbf{h^2=c_1^2+c_2^2 \rightarrow OB^2= x^2 + y^2 \rightarrow 1^2 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha \rightarrow 1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}$$

Ejercicios de ejemplo:

Sabiendo que sen α = 3/5, y que 90º <α <180°. Calcular el valor del coseno y la tangente.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

Nota: el coseno será negativo al estar el ángulo en el segundo cuadrante.

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

5. Resolución de triángulos rectángulos

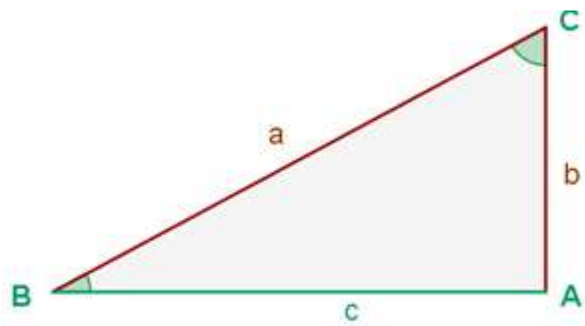
Resolver un triángulo es hallar sus lados, ángulos y área. Es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

Caso 1. Se conocen la hipotenusa y un cateto

$$B:\ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad B = \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo a = 415 m y b = 280 m.

sen B = 280/415 = 0.6747   B = arc sen 0.6747 = 42° 25′

C = 90° - 42°   25′ = 47° 35′

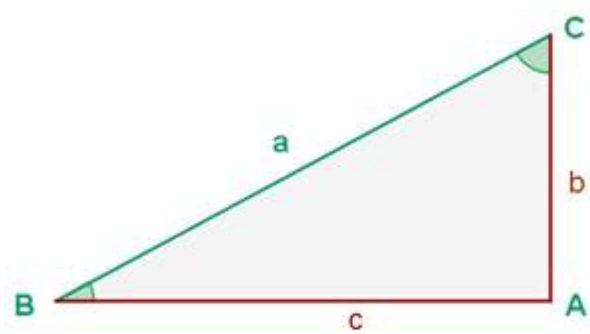
c = a cos B   c = 415 · 0.7381 = 306. 31 m

Caso 2. Se conocen los dos catetos

$$B:\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad B = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$a: \begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \quad a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo b = 33 m y c = 21 m .

tg B = 33/21 = 1.5714 B = 57° 32′

C = 90° − 57° 32′ = 32° 28′

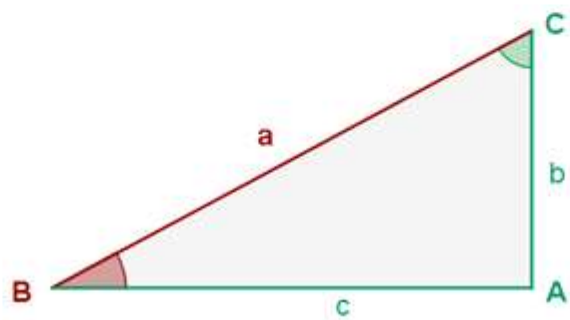
a = b/sen B a = 33/0.8347 = 39.12 m

Caso 3. Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo

$$C = 90° - B$$

$$b: \ \text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad b = a \cdot \text{sen } B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \frac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo a = 45 m y B = 22°.

C = 90° - 22° = 68°

b = a sen 22° b = 45 · 0.3746 = 16.85 m

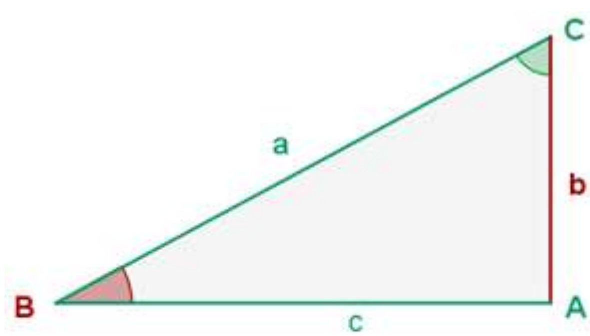
c = a cos 22° c = 45 · 0.9272 = 41.72 m

4. Se conocen un cateto y un ángulo agudo

$$C = 90° - B$$

$$a: \ \text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{b}{\text{sen } B}$$

$$c: \begin{cases} \text{cotg } B = \frac{c}{b} \quad c = b \cdot \text{cotg } B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo b = 5.2 m y B = 37º

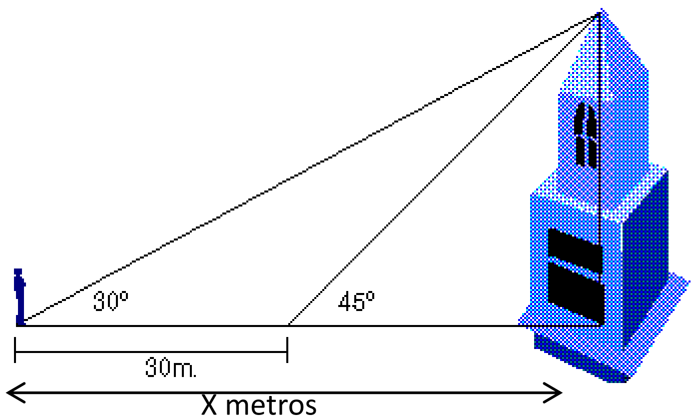
C = 90° - 37° = 53º

a = b/sen B   a = 5.2/0.6018 = 8.64 m

c = b · cotg B   c = 5.2 · 1.3270 = 6. 9 m

6. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones

Desde el lugar donde me encuentro la visual del edificio forma un ángulo de 30º. Si me acerco 30 m, el ángulo es de 45º. ¿Cuánto mide el edificio?



Hay que plantear un sistema de ecuaciones sabiendo que la tangente de los ángulos se calcula como cateto opuesto partido cateto contiguo.

Ecuación 1: $tg\ 30° = \frac{h}{x}$
Ecuación 2: $tg\ 45° = \frac{h}{x-30}$

Modificamos las ecuaciones para poder resolver el sistema:
$x \cdot tg\ 30° = h \rightarrow 0'58\,x = h$
$(x-30) \cdot tg\ 45° = h \rightarrow (x-30) \cdot 1 = h \rightarrow x - 30 = h$

Sustituimos h en la segunda ecuación:

$x - 30 = 0{,}58\,x \rightarrow x - 0{,}58x = 30 \rightarrow 0{,}42x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{0{,}42}$

Por tanto, x = 71,43 y entonces $h = 0'58\,x = 0'58 \cdot 71'43 = 41{,}42\ metros$

Luego el edificio mide 41'42 metros

Ejercicios

1. **Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:**

13 rad

22π/5 rad.

33π/10 rad.

2. **Expresa en radianes los siguientes ángulos:**

1316°

2 10°

3 127º

3 **Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.**

4 **Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.**

5 **Sabiendo que sec α = 2, 0< α < π /2, calcular las restantes razones trigonométricas.**

6 **Calcula las razones de los siguientes ángulos:**

225°, 330°, 2655°, −840º

7. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo**

8. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.**

9. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.**

10. **De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.**

11. **Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.**

12. **Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?**

14. **Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.**

19. Desde el lugar donde me encuentro la visual del edificio forma un ángulo de 42º. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 55º. ¿Cuánto mide el edificio?
[Solución: 48,49]

22. Para medir la altura de una torre, nos situamos en un cierto punto y medimos el ángulo con el que se ve la parte más alta, obteniendo un valor de 60 grados y 20'. Nos alejamos en línea recta 50 m y volvemos a medir el ángulo, obteniendo ahora 32º y 11'. Halla la altura de la torre*. [Solución: 49'02]*