Tema 2. Potencias y raíces

1. La notación científica

A veces tenemos que expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas. En esos casos, es cuando nos resulta especialmente útil lo que acabamos de ver. Por ejemplo, ¿sabes cuántas células puede llegar a tener el cuerpo humano? Pues unos cincuenta billones, es decir, 50000000000000.

$$50000000000000 = 5 \cdot 10000000000000 = 5 \cdot 10^{13} \text{ células}$$

Esto último es un ejemplo de lo que llamamos notación científica. Escribir un número en notación científica es expresarlo como el producto de un número (entero o decimal) en el intervalo [1, 10), multiplicado por una potencia de 10.

Veamos algunos ejemplos más:

a) $529000000 = 5{,}29 \cdot 10^{8}$

b) $590000000000 = 5{,}9 \cdot 10^{11}$

c) $0{,}000987 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}$

d) $0{,}000000045 = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$

Volviendo a las células, sabemos que su tamaño es muy pequeño. Por poner un ejemplo, el diámetro de una célula de la hoja del peral es de 0,0000074 m, que escrito en notación científica sería $7{,}4 \cdot 10^{-6}$ m.

¿Cómo escribir un número muy grande en notación científica?

Por ejemplo, la distancia que nos separa de la nebulosa de Andrómeda, por ejemplo, es aproximadamente igual a 95000000000000000000 km.

Para expresar este número en notación científica, basta con:

1. Escribir las cifras significativas (las que son distintas de 0, en este caso 95), colocando una coma a la derecha de la primera (9,5), de forma que el número esté en el intervalo [1, 10)

2. Contar las cifras que hay a la derecha del dígito anterior a la coma (en este caso es el 9 y por tanto hay 19 dígitos detrás del 9 en total), lo que nos dará el exponente al que hay que elevar el 10.

Por lo tanto, en este ejemplo:

$$95000000000000000000 = 9{,}5 \cdot 10^{19} \text{ km}$$

¿Cómo escribir un número muy pequeño en notación científica?

Para escribir en notación científica números muy pequeños, actuamos de forma parecida, sólo que en este caso el exponente del 10 será negativo. Como ejemplo, tomemos el número 0,000987. Para escribirlo en notación científica haremos lo siguiente:

1. Escribir las cifras significativas (987), colocando una coma a la derecha de la primera (9,87).
2. Contar el lugar que ocupa la primera cifra significativa a partir de la coma. Esto nos dará el valor absoluto del exponente (negativo).

Por lo tanto tendremos:

$$0{,}000987 = 9{,}87 \; . \; 10^{-4}$$

¿Cómo escribir brevemente un número muy grande cuyas cifras no sean ceros?

Puede parecer que para expresar un número con notación científica, es necesario que algunas de sus cifras sean ceros y sin embargo lo más habitual es que números muy grandes tengan muchas cifras distintas de cero. ¿Qué haremos? Utilizaremos las aproximaciones de números. Con números muy grandes o muy pequeños es frecuente hacer aproximaciones, despreciando cifras que no son significativas y sustituyéndolas por cero. Observa el siguiente ejemplo:

La distancia entre el Sol y la Tierra es 149.597.870.691 metros o 149.597.870,691 kilómetros. Tratándose de millones de kilómetros, cien mil kilómetros más o menos son insignificantes por lo que podemos redondear o aproximar este número y sustituir algunas cifras por ceros. Podríamos decir que la distancia máxima del Sol a la Tierra es aproximadamente 149.600.000 kilómetros (o 149.600.000.000 metros) y si lo queremos expresar con notación científica pondremos 1,496 · 108 Km ($1{,}496 \cdot 10^{11}$ m)

Para expresar un número con notación científica debemos usar una sola cifra para la parte entera y el resto las pondremos como parte decimal. **No es conveniente usar más de 3 cifras decimales. El resto de las cifras decimales se redondean o sustituyen por ceros.**

Ejemplos

Expresa con notación científica los siguientes números:

$237000 = 2{,}37 \cdot 10^{5}$

$128500000000000 = 1{,}285 \cdot 10^{14}$

$860000000000000000 = 8{,}6 \cdot 10^{17}$

Expresa con notación decimal:

$3,24 \cdot 10^5 = 3,24 \cdot 100000 = 3240000$

$4,7 \cdot 10^8 = 4,7 \cdot 100000000 = 470.000.000$

$5,859 \cdot 10^6 = 5,859 \cdot 1000.000 = 5.859.000$

Expresa con notación científica el número de habitantes que había en el mundo en el año 2005:

En el 2005 se contabilizaron 6.525.170.264 habitantes que es aproximadamente 6.525.000.000 es decir $6,525 \cdot 10^9$ habitantes.

2. Potencias de exponente fraccionario. Las raíces.

Una raíz es el número que hay que elevar a un exponente (llamado índice) para que el resultado de esa potencia sea igual al radicando (que es el número que hay dentro de la raíz).

$$\sqrt[\text{índice}]{\text{Radicando}} = \text{Raíz}$$

Se cumple pues que $(\text{raíz})^{\text{índice}} = \text{radicando}$

Cuando una potencia tiene exponente fraccionario, equivale a una raíz cuyo orden o índice es el denominador de ese exponente fraccionario. En general, se cumple que:

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

A continuación te presentamos algunos ejemplos:

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{5^3}$$

$$9^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{9^4}$$

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2}$$

Cuando el denominador es 2, entonces estamos ante una raíz cuadrada, y no es necesario poner el índice de la raíz.

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^1} = \sqrt{16} = \mp 4$$

2.1. Propiedades de las potencias de exponente fraccionario

Son análogas a las de las potencias normales:

$$a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}$$

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}}$$

Ejemplos:

$$5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{17}{12}}$$

$$2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$$

$$\left(6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{11}} = 6^{\frac{10}{33}}$$

3. La raíz cuadrada. Operaciones con raíces cuadradas.

3.1. Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k\cdot m}{k\cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

En el caso de la raíz cuadrada, si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt{3^3} = \sqrt[2\cdot 4]{3^{3\cdot 4}} = \sqrt[8]{3^{12}}$$

3.2. Simplificación de radicales de índice 2

Para ello, descomponemos en factores primos el radicando, haciendo potencias en la medida de lo posible de grado 2. Después, esas potencias de grado 2 las podemos extraer fuera del radical con exponente 1, dejando dentro las de grado uno:

$$\sqrt{360} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 6\sqrt{10}$$

3.3. Radicales semejantes de índice 2

Los radicales son semejantes cuando la raíz es igual. Por ejemplo, $2\sqrt{3}\ y\ 11\sqrt{3}$ son semejantes, pero no así $2\sqrt{3}\ y\ 11\sqrt{4}$.

Los radicales semejantes se pueden sumar o restar sumando o restando los números que hay delante de la raíz.

$$2\sqrt{3} + 11\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} - 11\sqrt{3} = -9\sqrt{3}$$

3.4. Producto y división de radicales de índice 2

Los radicandos se descomponen en factores primos, de modo que los radicales se convierten en potencias con exponente fraccionario y se puede aplicar sobre ellos las operaciones de potencias.

$$\sqrt{18}\cdot\sqrt{48} = \sqrt{2\cdot 3^2}\cdot\sqrt{2^3\cdot 3^2} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{4}{2}}\cdot 3^{\frac{4}{2}} = 2^2\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = 36$$

3.4. Racionalización de denominadores

Racionalizar denominadores es eliminar las raíces del denominador.

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir un par de casos casos.

1) Del tipo

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

2) Del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a+b \quad\rightarrow\quad a-b$$

$$-a+b \quad\rightarrow\quad -a-b$$

$$a-b \quad\rightarrow\quad a+b$$

$$-a-b \quad\rightarrow\quad -a+b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados".

$$\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)=a^2-b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=$$

$$= \frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{16-4\cdot 2} = \frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)} = \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{12}}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{2^2\cdot 3}}{25-4\cdot 6} = \frac{10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{25-24} = 10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

Tema 2. Ejercicios

1. Indica cuáles de los siguientes números están escritos correctamente en notación científica.

a) $4{,}85 \cdot 10^{-9}$

b) $23{,}54 \cdot 10^{8}$

c) $0{,}41 \cdot 10^{3}$

d) $4{,}3385 \cdot 10^{-9}$

2. Escribe en notación científica los siguientes números:

a. 0,00003695
b. $36{,}987 \cdot 10^{-9}$
c. 1265000000
b. $226{,}9 \cdot 10^{6}$

3. . Expresa como potencias los siguientes radicales:

a) $\sqrt{\frac{1}{49}}$; b) $\sqrt[3]{125}$; c) $\sqrt{-25}$; d) $\sqrt[3]{-27}$; e) $\sqrt[4]{-16}$; f) $\sqrt[5]{-32}$.
g) $\sqrt{3}$; h) $\sqrt[3]{5^2}$; i) $\sqrt{7^{-1}}$; j) $\sqrt[10]{13}$; k) $\sqrt[7]{6^{-2}}$; l) $\sqrt[6]{2^{18}}$.

4. Escribir en forma radical las siguientes potencias de exponente fraccionario:

a) $2^{\frac{1}{2}}$; b) $7^{\frac{2}{3}}$; c) $3^{-\frac{1}{2}}$; d) $10^{\frac{3}{7}}$; e) $5^{0'4}$; f) $8^{-\frac{2}{3}}$; g) $15^{1'\hat{3}}$; h) $15^{1'3}$.

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{5^2}$; c) $\sqrt{7^{-1}}$; d) $\sqrt[10]{13}$; e) $\sqrt[7]{6^{-2}}$; f) $\sqrt[6]{2^{18}}$.

5. Simplificar los radicales siguientes:

a) $\sqrt{2^6}$ b) $\sqrt{3^{11}}$ c) $\sqrt{192}$

6. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $32\sqrt{2}$ - $12\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ d) $3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6}$
b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{48}$