Tema 1. Los números

1. Los números naturales

Los números naturales se representan con el símbolo **N** y son **todos aquellos números que no tienen parte decimal ni tienen signo**:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,..., 15, 16,..., 66, 67, 68,..., 12345, 12346,...}

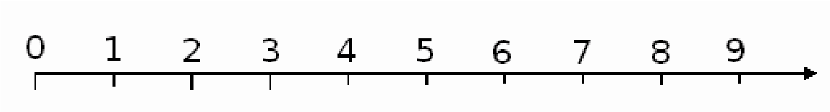
Para decir que un número es menor que otro, en matemáticas usamos el símbolo <, y para decir que un número es mayor que otro, escribimos >. De esta forma la frase anterior quedaría de la siguiente forma:

$0 < 1 < 2 < 3$

Si lo escribimos de mayor a menor:

$3 > 2 > 1 > 0$

La representación gráfica de los números naturales se hace sobre una semirrecta horizontal donde el extremo izquierdo es el 0. Desde aquí se divide la semirrecta en partes iguales, y en cada marca vamos situando los números ordenados de menor a mayor.



Representación gráfica de los números naturales

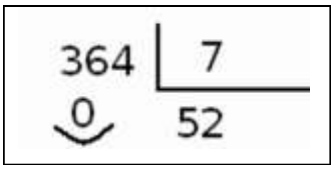
1.1. Múltiplos de un número natural

Los múltiplos de un número son los que se obtienen al multiplicar dicho número por todos los números naturales salvo el 0. Puesto que hay infinitos números naturales un número tiene infinitos múltiplos.

Por ejemplo: los múltiplos del número 3 son 3, 6, 9, 12,…

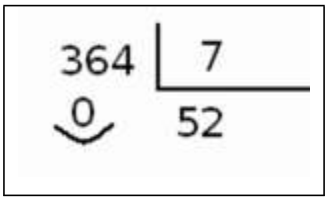
Para saber si un número es múltiplo de otro simplemente debes hacer la división y comprobar que el cociente es un número natural y el resto de la división es cero.

Ejemplo: El número 364 es múltiplo de 7 porque 364 = 52 x 7



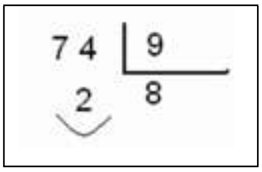
1.2. Divisores de un número natural

Los divisores de un número natural son aquellos números que se pueden dividir entre él siendo el resto cero. Ejemplo: “el número 7 es divisor de 364”; también se dice que ”el número 364 es divisible entre 7” ya que al dividir 364 entre 7 el resto es 0.



Para saber si un número es divisor de otro solo tienes que hacer la división y comprobar si el resto es cero.

Ejemplo: El número 9 no es divisor de 74, o el número 74 no es divisible por 9, ya que el resto de la división no es 0.



1.3. Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son unas reglas que nos permiten averiguar si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Vamos a ver algunas de estas reglas:

- Un número es divisible por 2 si acaba en cero o en cifra par. Ejemplo: 534 y el 430 son divisibles entre 2.
- Un número es divisible por 5 si acaba en cero o en 5. Ejemplo: el 675 y el 980 son divisibles entre 5.
- Un número es divisible por 10 si acaba en cero.
- Un número es divisible por 4 si las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4. Ejemplo: el 824 y el 7200 son divisibles por 4.
- Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

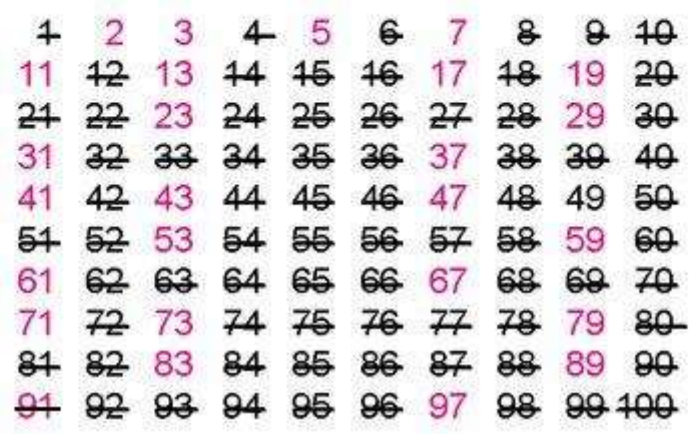
  Ejemplo: el 681 es divisible entre 3 ya que si sumas sus cifras: 6 + 8 + 1 = 15 y el 15 es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3 a la vez. Ejemplo: el

  528 es divisible por 6 porque es divisible por 2 (ya que acaba en cifra par) y también es divisible por 3 (ya que al sumar sus cifras da un número múltiplo de 3, como se ve a continuación 5 + 2 + 8 = 15).
- Esta regla es idéntica a la del 3. Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Ejemplo: el 684 es divisible entre 9 ya que si sumas sus cifras: 6 + 8 + 4 = 18 y el 18 es múltiplo de 9.

1.4. Números primos y números compuestos

Los números primos son todos los números naturales, mayores que 1, que son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad. Cuando un número no es primo se dice que es compuesto.

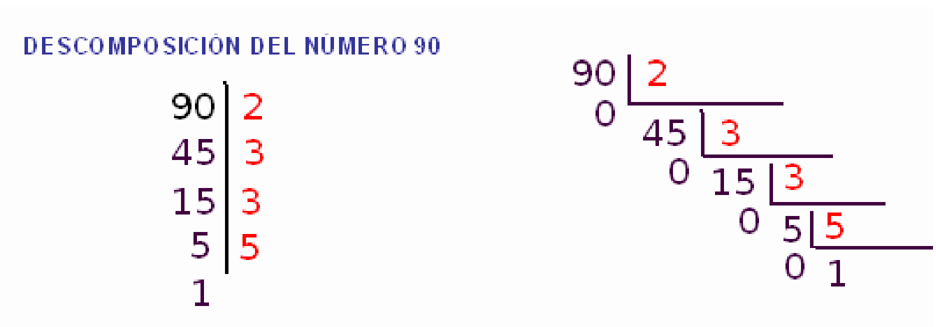
Para obtener los números primos menores que 100, se puede seguir el proceso de la criba de Eratóstenes. En concreto, como se ve en la siguiente imagen, los primos menores que 100 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97.



1.5. Descomposición de un número en factores primos

Cualquier número se puede descomponer de forma única en productos de potencias de factores primos. Para hacer la descomposición usamos un esquema muy sencillo que conocerás a través del siguiente ejemplo: Vamos a descomponer el número 90:

Aplicando las reglas de divisibilidad observamos que el 90 es divisible entre 2, entre 3 y entre 5. Vamos dividiendo el 90 entre sus divisores comenzando por el más pequeño (aunque podríamos empezar por el que quisiéramos) y reflejamos los resultados en el siguiente esquema:



90 = 2 x 32 x 5

1.6. Máximo común divisor de un conjunto de números

El máximo común divisor de un conjunto de números es el divisor común mayor. Este es un concepto que vas a comprender muy bien con el siguiente ejemplo:

Los divisores del 24 son: 24, 12, 8, **6**, 4, **3**, **2** y **1**

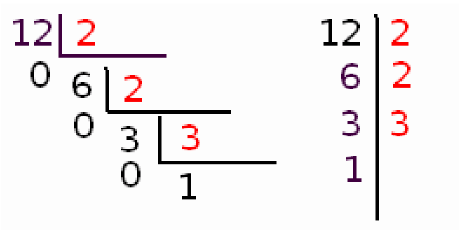
Los divisores del 90 son: 90, 45, 30, 18, 15, 10, 9, **6**, 5, **3**, **2** y **1**

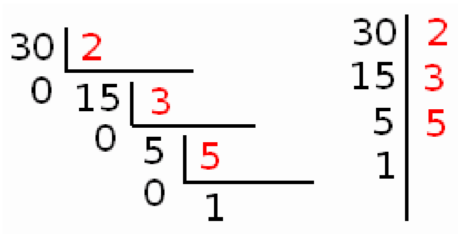
Los números señalados en negrita son divisores comunes a 24 y 90 y el mayor de esos divisores es el 6. Luego 6 es el máximo común divisor. Dos números se dice que son primos entre sí cuando su único divisor común es el 1 y, por tanto, su máximo común divisor es el 1. Ejemplo: 20 y 21 son primos entre sí porque sólo tienen el 1 como único divisor común.

<u>Método general para calcular el M.C.D. de un conjunto de números</u>

Calculemos el máximo común divisor de 12 y de 30:

1º. Descomponemos los números en producto de factores primos:





12=22 ·3

30= 2·3·5

2º. El máximo común divisor es el producto de los factores comunes con el menor exponente: M.C.D.= 2 · 3 = 6

1.7. Mínimo común múltiplo de un conjunto de números

El mínimo común múltiplo de un conjunto de números es el múltiplo común más pequeño. Este es un concepto que vas a comprender muy bien con el siguiente ejemplo:

Los múltiplos del 6 son: 6; **12**; 18; **24**; 30; **36**; 42; 48;...

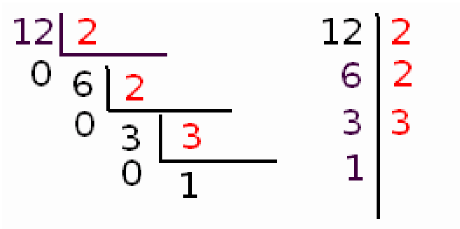
Los múltiplos del 4 son: 4, 8; **12**; 16; 20; **24**; 28; 32; **36**;…

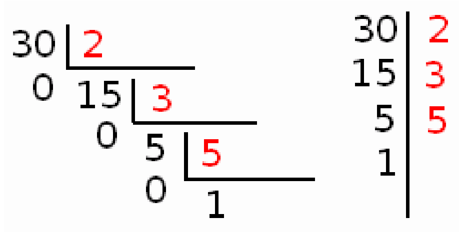
Los números marcados en negrita son múltiplos comunes a ambos y el mínimo común múltiplo (m.c.m.) es el más pequeño de los comunes; es decir el 12

Método general para calcular el mínimo común múltiplo de un conjunto de números

Observa el siguiente ejemplo: Calculemos el m.c.m. de 12 y de 30:

1º. Descomponemos los números en producto de factores primos:





12=22 ·3

30= 2·3·5

2º. El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes, eligiendo el que tiene mayor exponente, y los factores no comunes:

m.c.m = 22 · 3 · 5= 4 · 3 · 5= 60

2. Los números enteros

Los números enteros son los números naturales añadiéndole los mismos números con signo negativo, es decir:

Z = {..., -1234,-1233,...,-78,-77,...,-3, -2,-1,0, +1, +2, +3,..., +77, +78,..., +1233, +1234,...}

A los números enteros se les identifica con el símbolo Z .

Los números naturales se consideran que son los enteros positivos, es decir, los números naturales son números enteros, pero no todos los números enteros son números naturales (los negativos no son naturales).

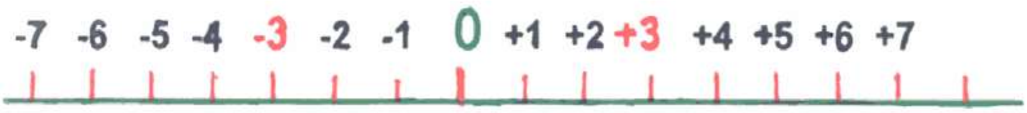
Los números naturales tienen **opuesto¸** que es el mismo número cambiado de signo (el opuesto de -2 es +2, y el opuesto de +9 es el -9).

EJEMPLOS:

1. El opuesto de -5 es +5.
2. El opuesto de +8 es -8.
3. El opuesto de -17 es 17.
4. El opuesto de 4 es -4.
5. El opuesto de 0 es 0.

Para representar los números enteros seguimos los siguientes pasos:

1. Trazamos una recta horizontal y situamos en ella el 0, de forma que el 0 divide a la recta en dos semirrectas.
2. Dividimos cada una de las dos semirrectas en partes iguales
3. Situamos los números enteros sobre las semirrectas: los enteros positivos a la derecha del cero, y los enteros negativos a la izquierda del cero:



Los números enteros también tienen lo que se llama **valor absoluto**, que se representa escribiendo el número entre dos barras verticales. El valor absoluto de un número entero es el número natural que se obtiene al quitarle el signo al número inicial, luego $|-7| = 7$.

EJEMPLOS:

a) $|+5| = 5$

b) $|-12| = 12$

c) $|+1| = 1$

d) $|-8| = 8$

2.1. Operaciones con números enteros

2.1.1.a. Suma de números enteros con el mismo signo

Para sumar números enteros de igual signo, se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos.

Date cuenta que:

- La suma de dos números enteros negativos es otro número negativo.
- La suma de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.

Ejemplo:

a) $5 + 7 = +(+5 + 7) = +12$

b) $(-3) + (-6) = -(-3 -6) = -9$

2.1.1.b. Suma de números enteros con distinto signo

Para sumar números enteros de distinto signo, se toman sus valores absolutos, al mayor valor se le resta el menor y se pone el signo del mayor. Vemos un ejemplo:

a) -7 + 12 = + 12 - -7 = +12 – 7 = +5

b) 11 + -16 = - -16 – 11 = -16 -11 = -5

Si lo que tenemos es una suma de varios números enteros de distinto signo, lo que haremos será:

a) Se suman separadamente los números positivos, por un lado y los negativos por el otro.

b) Se suman el número positivo y el número negativo obtenido. Ejemplo: Vamos a calcular el resultado de esta suma:

(+4) + (-2) + (+3) + (+5) +(-6) = (+12) + (-8) = +4

2.1.2. Resta de números enteros

Para restar un número entero, si éste está dentro de un paréntesis, se cambia el signo del número.

(- 5) – (+ 7)	=	(- 5) + (- 7)	=	- 12
(+ 4) – (- 6)	=	(+ 4) + (+6)	=	+ 10
(- 3) – (- 7)	=	(- 3) + (+7)	=	+ 4

Date cuenta que el signo (-) puede tener dos significados:

a) Puede indicar que un número es negativo (signo de número). Ejemplo: - 8.

b) Puede indicar una resta (signo de operación).Así, en 14 – (- 6) el primer signo menos, el que está antes del paréntesis –, es de operación (resta), mientras que el segundo -, es de número.

En la primera unidad vimos que el paréntesis nos indica qué operaciones tenemos que realizar primero. Para realizar la operación 7 + (5 – 16), lo hacemos así:

a) Primero hacemos la operación indicada dentro del paréntesis.

b) Si delante del paréntesis tenemos un signo +, no cambiamos el signo del resultado de efectuar las operaciones del paréntesis.

c) Pero si delante del paréntesis hay un signo -, cambiamos de signo el resultado del paréntesis.

Lo mismo ocurre si hay corchete. Por tanto, la operación anterior quedaría así:

7 + (-11) = 7 – 11 = -4

Vamos a hacer la misma operación, pero con un signo – delante del paréntesis:

7 - (5 – 16) = 7 – (-11) = 7 + 11 = +18

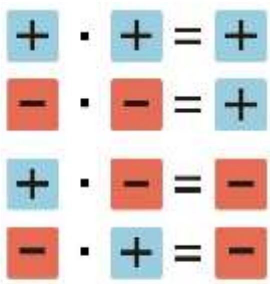
2.1.3. Multiplicación de números enteros

Para hallar el producto de dos números enteros hay que multiplicar sus valores absolutos. El signo del resultado es positivo cuando ambos números o factores tienen el mismo signo y negativo cuando tienen signos diferentes.

Ejemplos de producto de enteros con el mismo signo: (+5)·(+3) = +15 (-5) · (-3) = +15

Ejemplos de producto de enteros con distinto signo: (+5) · (-3) = -15 (-5) · (+3) = -15

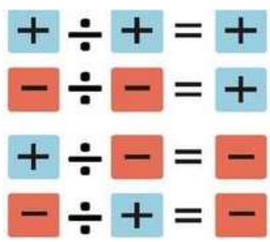
Se suele recurrir a la siguiente regla de los signos:



2.1.4. División de números enteros

Para dividir dos números enteros se dividen sus valores absolutos. El cociente tiene signo positivo si los dos números o factores tienen el mismo signo y signo negativo si tienen diferentes signos.

Se sigue la misma regla de los signos que para el producto.

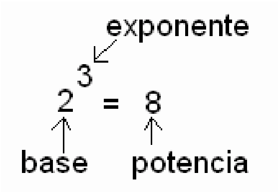


Ejemplos:

(-5) : (+1) = -5 (-10):(-2) = + 5 (+10):(-2) = -5 (+14):(+2) = +7

2.2 Potencias de números enteros

En la potenciación se parte de dos números: base y exponente. Se trata de hallar otro número llamado potencia. Potencia es el resultado de multiplicar la base por sí misma tantas veces como indica el exponente.



Ejemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Se lee: 2 elevado a 3 igual a 8

La base es el número que debemos multiplicar, y el exponente es las veces que lo multiplicamos. Potencia es el resultado de la multiplicación. Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, se llaman cubos.

Las potencias de números enteros tienen las siguientes propiedades:

- Cualquier número elevado al exponente 1 es igual al mismo número.

$A^1 = a$ $\qquad$ $3^1 = 3$

- Cualquier número elevado al exponente 0 es igual a 1.

$A^0 = 1$ $\qquad$ $3^0 = 1$

2.2.1. Producto de potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes. $a^m.a^n = a^{m+n}$

Ejemplos: $\quad 5^3.5^4 = 5^7 \qquad 7^8.7^9 = 7^{17}$

2.2.2. Cociente de potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes. $a^m:a^n = a^{m-n}$

Ejemplos: $\quad 4^6:4^2 = 5^4 \qquad 5^{12}:5^8 = 5^4$

2.2.3. Potencia de exponente negativo

Una potencia de exponente negativo equivale al inverso de esa potencia con exponente postivo. Es decir:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

2.2.4. Potencia de base negativa

Al elevar un número negativo a un exponente par el resultado es siempre positivo. Al elevarlo a un exponente impar, el resultado es siempre negativo.

Ejemplos: $(-5)^4 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = 625$ El resultado es positivo

$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$ El resultado es negativo

2.2.5. Potencia de otra potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se déjà la misma base y se multiplicando los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Ejemplos: $(3^2)^4 = 3^8$

Fíjate que: $(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$

2.3. Operaciones combinadas con enteros: Prioridad de las operaciones

Si en una operación aparecen sumas, o restas y multiplicaciones o divisiones, el resultado varía según el orden en que se realicen.

1º) Si en una expresión aparecen **paréntesis, corchetes o llaves**, lo primero que hay que realizar son las operaciones que hay dentro de dichos paréntesis, corchetes y llaves (por ese orden)

2º) Las multiplicaciones y divisiones, conforme van apareciendo **de izquierda a derecha**.

Por ejemplo, en la operación 10 x 2 :5, primero se haría la multiplicación pues aparece más a la izquierda, quedando 10 x 2 : 5 = 20 : 5 = 4. Sin embargo, en la operación 10 : 2 x 5, primero se haría la división pues ahora aparece más a la izquierda, con lo que el resultado sería 10 : 2 x 5 = 5 x 5 = 25.

3º) Sumas y restas

Veamos como ejemplo la operación: 80 – [18 + 3 · (5 – 2) – 2 · 4 – (7 – 8 : 2)]

Lo mejor es realizar estas operaciones de dentro a fuera, es decir, empezando por los paréntesis, siguiendo por los corchetes y finalizando con las llaves. Si dentro de algunos de ellos hay varias operaciones, se debe respetar la prioridad de las multiplicaciones y divisiones sobre las sumas y restas.

En primer lugar realizamos los paréntesis que se destacan:

80 – [18 + 3 · (5 – 2) – 2 · 4 – (7 – 8 : 2)] =

80 – [18 + 3 · 3 – 2 · 4 – (7 – 4)] =

Ahora realizamos las operaciones del corchete, pero respetando la prioridad de las multiplicaciones que hay:

80 – [18 + 3 · 3 – 2 · 4 – 3] =

80 – [18 + 9 – 8 – 3] =

Ahora continuamos operando dentro del corchete:

80 – 16 = 64

3. Los números racionales. Las fracciones

Un número racional es cualquier número que puede representarse como una fracción. Una fracción es una división de dos números enteros, que se representan uno arriba (numerador) y otro abajo (denominador) separados por un segmento horizontal. Al conjunto de números racionales se le denomina Q.

Ejemplos de números racionales: $\frac{4}{3}, \frac{-16}{25}, \frac{2}{-3}$

Por asi decirlo, el denominador e indica las partes iguales en que dividimos una unidad, y el numerado indica las partes que cogemos de esa unidad.

¡Ojo! No podemos dividir por cero, luego el denominador de una fracción nunca puede ser cero.

Ejemplos de lectura de fracciones:

$\frac{3}{2} \rightarrow$ tres medios	$\frac{5}{8} \rightarrow$ cinco octavos
$\frac{4}{3} \rightarrow$ cuatro tercios	$\frac{2}{9} \rightarrow$ dos novenos
$\frac{6}{5} \rightarrow$ seis quintos	$\frac{3}{10} \rightarrow$ tres décimos
$\frac{1}{6} \rightarrow$ un sexto	$\frac{4}{15} \rightarrow$ cuatro quince**avos**
$\frac{2}{7} \rightarrow$ dos séptimos	$\frac{5}{24} \rightarrow$ cinco veinticuatro**avos**

3.1 Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes (y por tanto son el mismo número racional) cuando escritas de distintas maneras tienen el mismo resultado.

Ejemplo: $\frac{3}{4}\ y\ \frac{6}{8}\ son\ fracciones\ equivalentes$

Para comprobar que dos fracciones son equivalentes, basta con multiplicar en cruz y observar que el resultado obtenido es el mismo.

Para multiplicar en cruz se opera de la siguiente manera: numerador de la primera fracción por denominador de la segunda fracción y denominador de la primera fracción por numerador de la segunda. En este caso, se cumple que **3 · 8 = 4 · 6**, luego son equivalentes. Al ser equivalentes, daría la división que representa el mismo resultado, y de hecho, 3 dividido entre 4 da como resultado 0,75, igual que si dividimos 6 entre 8.

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y del denominador por el mismo número.

- Si obtenemos fracciones equivalentes mediante multiplicaciones, se denominan fracciones amplificadas.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow[\times 2]{\times 2} \frac{6}{10}$$

- Si obtenemos fracciones equivalentes mediante divisiones, se denominan fracciones simplificadas

$$\frac{24}{32} \underset{:8}{\overset{:8}{=}} \frac{3}{4}$$

Un caso especial son las fracciones con signos. Si tanto numerador como denominador tienen signos negativos, serán equivalentes a la misma fracción con signos positivos. Si uno de los dos tiene signo positivo y el otro negativo, serán equivalentes a la fracción que tenga los signos al revés. Esto se debe a que la división de dos números positivos o de dos números negativos da resultado positivo, y si numerador y denominador tienen signos distintos (da igual cuáles sea el positivo y el negativo), el resultado de la división es negativo.

Ejemplos $\frac{3}{4}\ y\ \frac{-3}{-4}\ son\ fracciones\ equivalentes$

$\frac{-3}{4}\ y\ \frac{3}{-4}\ son\ fracciones\ equivalentes$

$\frac{+a}{+b}$	positivo positivo	= +	$\frac{+a}{-b}$	positivo negativo	= -
$\frac{-a}{-b}$	negativo negativo	= +	$\frac{-a}{+b}$	negativo positivo	= -

3.2. Fracción propia e impropia

Fracción propia es la que el numerador es menor que el denominador. El valor de esta fracción es menor que la unidad. Fracción impropia es la que el numerador es igual o mayor que el denominador.

FRACCIONES PROPIAS (Numerador menor que el denominador) $\frac{2}{7}$

FRACCIONES IMPROPIAS (Numerador igual o mayor que el denominador) $\frac{3}{3}, \frac{8}{5}$

3.3 Simplificación de fracciones y fracción irreducible

Simplificar una fracción es convertirla en otra equivalente cuyos términos sean números más pequeños. Para simplificar se divide el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número que sea divisor de ambos. Cuando una fracción no se puede simplificar más se dice que es irreducible y sus términos son primos entre sí.

EJEMPLO:

$$\frac{360}{480} \xrightarrow{:2} \frac{180}{240} \xrightarrow{:2} \frac{90}{120} \xrightarrow{:2} \frac{45}{60} \xrightarrow{:3} \frac{15}{20} \xrightarrow{:5} \frac{3}{4}$$

$$\frac{360}{480} = \frac{180}{240} = \frac{90}{120} = \frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

La última fracción obtenida es la fracción irreductible.

Para obtener la fracción irreducible, basta con seguir el siguiente proceso:

a) Se descompone en factores primos el numerador

b) Se descompone en factores primos el denominador

c) Se escribe la fracción de nuevo, siendo el numerador el producto de sus factores primos, y el denominador también el producto de sus factores primos.

d) Eliminamos aquellos factores primos que se repiten en numerador y denominador

e) Multiplicamos ahora los factores primos que queden en el numerador, y ese será el numerador de la fracción irreducible. Si no hubiera ningún factor, el numerador sería 1.

f) Multiplicamos ahora los factores primos que queden en el denominador, y ese será el denominador de la fracción irreducible. Si no hubiera ningún factor, el denominador sería 1.

Veamos un ejemplo de obtención de la fracción irreducible con la fracción 420/126:

a) Se descompone en factores primos el numerador

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	1

420 = 2 x 2 x 3 x 5 x 7 x 1

b) Se descompone en factores primos el denominador

126	2
63	3
21	3
7	7
1	1

126 = 2 x 3 x 3 x 7 x 1

c) Ahora escribimos de nuevo la fracción, siendo el numerador el producto de los factores primos de 420 y el denominador el producto de los factores primos de 126.

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1}$$

d) Eliminamos aquellos factores primos que se repiten en numerador y denominador, que en este caso, están marcados en negrita:

$$\frac{\mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \cdot 5 \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{2} \cdot 3 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{7} \cdot \mathbf{1}}$$

Luego nos queda la siguiente fracción que resolvemos para obtener la irreducible

$$\frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$$

3.4. La fracción como un operador

Las fracciones pueden usarse como operadores en algunos problemas. Veamos unos ejemplos:

EJEMPLO 1: En una localidad se sabe 2/7 son jóvenes y 5/7 son adultos. Si en esa localidad hay 2.275 habitantes, ¿cuántos serán jóvenes y cuántos adultos?

Lo que quiere decir el problema es que podemos dividir a la localidad en 7 grupos iguales, de los cuales 2 serán jóvenes y 5 personas mayores. También lo podemos decir de otra forma: por cada 7 personas que hay, 2 son jóvenes y 5 adultos.

Por lo tanto, las operaciones que debemos hacer son:

2275 : 7 = 325;   325 . 2 = 650, que serán los jóvenes, es decir, 2/7 de 2275 son 650.

2275 : 7 = 325;   325 . 5 = 1625, que serán los adultos, es decir, 5/7 de 2275 son 1625.

EJEMPLO 2: Una persona recibe 2/5 partes de un premio. Si el premio total era de 3500 euros, ¿cuánto era el importe total del precio?

En este caso, la solución consiste en:

1º dividir el resultado por 2 para saber lo que vale una parte :   3500 : 2 = 1750

2º multiplicar la cantidad por 5:   1750 x 5 = 8750 ya que el total son 5 partes.

3.5. Reducción de fracciones a un denominador común

Para expresar varias fracciones con el mismo denominador vamos a utilizar el método del mínimo común múltiplo (m.c.m.). Para ello seguiremos estos pasos:

1. Se halla el m.c.m. de los denominadores.
2. Se coloca el m.c.m. como denominador común a todas ellas.
3. Para hallar el numerador de cada fracción se divide el m.c.m. por el denominador que tenía la fracción y el cociente obtenido se multiplca por el numerador.

- $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{5}$ $m.c.m.(4,5)=\mathbf{20}$

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}} \quad y \quad \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{20}}$$

- $\frac{13}{20}$ y $\frac{8}{15}$ $m.c.m.(20,15)=\mathbf{60}$

$$\frac{13 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{\mathbf{39}}{\mathbf{60}} \quad y \quad \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{60}}$$

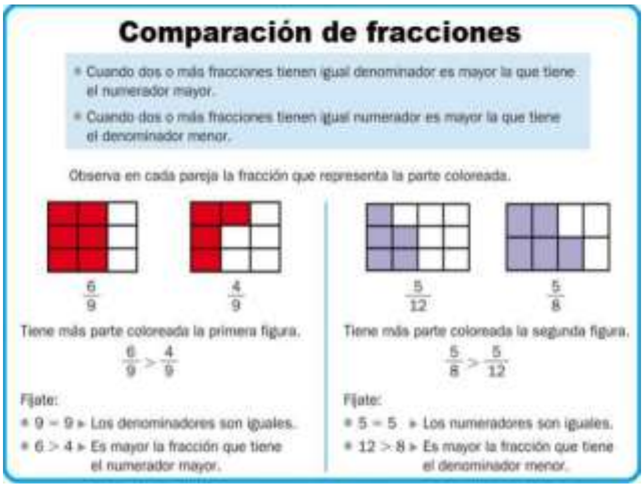
3.6. Comparación de fracciones

Vamos a distinguir tres tipos de fracciones:

1. De igual denominador. Es mayor la fracción que tenga el numerador mayor.

2. De distinto denominador. En este caso se reducen las fracciones a común denominador y aplicamos el criterio anterior.

3. De igual numerador. Será mayor la que tenga el denominador más pequeño-.



3.7. Operaciones con números racionales

3.7.1 Suma y resta de números racionales

Para sumar o restar números racionales, estos han de tener el mismo denominador. Por tanto, si no lo tienen, hay que transformar estas fracciones en otras equivalentes cuyo denominador sea el mismo.

Para sumar o restar fracciones con igual denominador se suman o se restan los numeradores y se deja el mismo denominador

$$\frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7+5}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$$

Suma y resta de fracciones con distinto denominador

Suma

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$$

1. Las reducimos a común denominador:
m.c.m. (6, 4) = 6 · 2 = 4 · 3 = 12.

2. Las sumamos.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$

Resta

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{8}$$

1. Las reducimos a común denominador:
12 · 4 = 8 · 6 = 48.

2. Las restamos.

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{8}=\frac{11\cdot 4}{12\cdot 4}-\frac{3\cdot 6}{8\cdot 6}=\frac{44}{48}-\frac{18}{48}=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

Para **sumar o restar fracciones** con distinto denominador:
· Se reducen a un común denominador.
· Se suman o restan las fracciones obtenidas.

3.7.2. Multiplicación de números racionales

En este caso, se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.

$$\boxed{\frac{3}{4}}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times 5}{4\times 7}=\frac{15}{28}$$

3.7.3. División de números racionales

En este caso, se multiplican el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, obteniendo como resultado el numerador de la fracción resultante, y el denominador del resultado será el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

$$\frac{4}{5}:\frac{3}{9}=\frac{4\times 9}{5\times 3}=\frac{36}{15}$$

3.7.4. Números inversos

El inverso de una fracción es otra fracción que resulta de intercambiar numerador por denominador.

Fracción		Inversa
$\frac{3}{5}$	$\longrightarrow$	$\frac{5}{3}$
$\frac{7}{9}$	$\longrightarrow$	$\frac{9}{7}$

3.7.5. Potenciación de números racionales

La idea es similar a la de los números enteros, solo que la base es una fracción.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \frac{81}{625}$$

Las potencias de números racionales tienen las mismas propiedades que las de números enteros:

- Cualquier fracción elevada al exponente 1 es igual a la misma fracción.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$$

- Cualquier fracción elevada al exponente 0 es igual a 1.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$$

Producto de potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1^9}{2^9} = \frac{1}{512}$$

Cociente de potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^6 \div \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{6-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

Potencia de exponente negativo

Una potencia de fracción con exponente negativo equivale al inverso de esa fracción con exponente positivo. Es decir:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

Potencia de otra potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplicando los exponentes.

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^{4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3\cdot 4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-12} = \left(\frac{5}{2}\right)^{12}$$

3.7.6. Operaciones combinadas con números racionales

Se resuelven igual que en el caso de los números enteros: primero resolvemos los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha y por último las sumas y restas en el orden en que estén escritas. La fracción que resulte se simplificará siempre que sea posible. A continuación puedes ver algunos ejemplos.

a) $\frac{1}{8} + \boxed{\frac{11}{4} \cdot 6} + \frac{3}{5} = \frac{1}{8} + \frac{66}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{40} + \frac{660}{40} + \frac{24}{40} = \frac{689}{40}$

b) $\boxed{\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{2}} + \boxed{\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5}{16} + \frac{21}{12} = \frac{15}{48} + \frac{84}{48} = \frac{99}{48} = \frac{33}{16}$

c) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \left(6 + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{8} + \boxed{\frac{1}{4} \cdot \frac{33}{5}} = \frac{1}{8} + \frac{33}{20} = \frac{5}{40} + \frac{66}{40} = \frac{71}{40}$

d) $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) : \left(6 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8}\right) : \left(\frac{30}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{8} : \frac{27}{5} = \frac{3 \cdot 5}{27 \cdot 8} = \frac{5}{72}$

e) $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{10}{6} + \frac{14}{6}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

3.7.7. Los números decimales

Al hacer la división que representa una función, puede que esta no sea exacta, y nos den decimales. En concreto, los casos posibles son:

a) Que la división dé como resultado un número natural (sin decimales)

$$\frac{6}{2} = 3$$

b) Que la división dé como resultado un número entero (sin decimales)

$$\frac{-6}{2} = -3$$

c) Que la división dé como resultado un número con un número limitado de decimales

$$\frac{5}{2} = 2'5$$

d) Que la división dé como resultado un número con infinitos decimales, en cuyo caso obligatoriamente uno o más de ellos se repetirán. Estos son los números decimales periódicos.

$$\frac{1}{3} = 0'3333333333\ldots$$

3.7.7.1. Números decimales periódicos

El número 1,21212121…, es un número decimal con infinitas cifras decimales que se repiten indefinidamente. A estos números se les llama decimales periódicos y a la cifra o conjunto de cifras que se repiten se les llama período. El periodo se puede representar gráficamente con un arco.

$$2,\overset{\frown}{4} \qquad 3,\overset{\frown}{36}$$

El arco encima de unos dígitos indica que está cifra se repite de forma indefinida. Es decir, los números anteriores son el 2’44444…. y el 3,3636363636….

- Cuando en un número decimal el período empieza justo detrás de la coma, se dice que el decimal es periódico puro.

- Si entre la coma y el período hay una o varias cifras decimales, el decimal se llama periódico mixto. A las cifras que hay entre la coma y el período se les llama anteperíodo.

Periódico puro: $0{,}424242\ldots = 0{,}\overset{\frown}{42}$

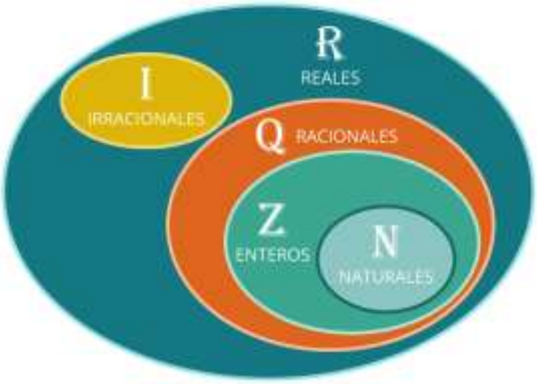
Periódico mixto: $3{,}23584584584\ldots = 3{,}23\overset{\frown}{584}$

4. Los números irracionales

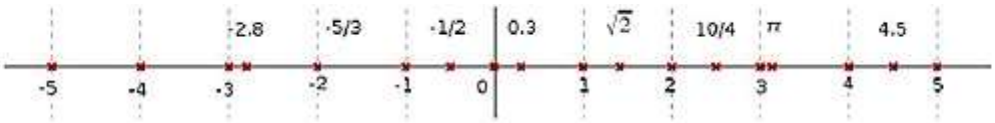
Estos números son aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, algunos de estos números son: π , $e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, etc$. No pueden escribirse como fracción.

1.5. Los números reales

A lo largo de este tema hemos estudiado los números naturales, enteros, racionales e irracionales; a todos estos números juntos se les llama números reales.



Los números reales se representan sobre la recta numérica que toma el nombre de los números que contiene y se denomina recta real. A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real un punto de la recta. Por ejemplo:



1.5.1. Intervalos

Una vez vista la recta real donde están representados todos los tipos de números que hemos estudiado, se llama intervalo determinado por dos números reales a todos los números que se pueden representar en la recta real entre ambos, es decir, a todos los números que puedo colocar en el segmento de recta real determinado por dos números reales.

EJEMPLO:

El intervalo entre -1 y 2 es, gráficamente, la zona coloreada de rojo en la recta real:

A los números que determinan el intervalo se les denomina extremos. Dependiendo de si los extremos se incluyen en el intervalo o no la forma de escribirlo matemáticamente varía. Cuando los extremos pertenecen al intervalo se usan los símbolos [o] , si los extremos no están dentro del intervalos se usan los símbolos (o). Los extremos, a la hora de escribir, se ponen de menor a mayor.

Una propiedad importante de los intervalos es que están formados por infinitos números reales.

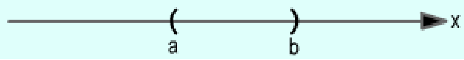
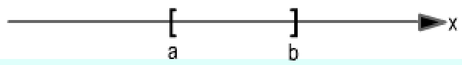
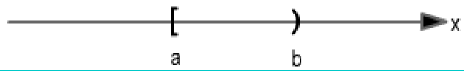
Veamos algunos ejemplos para ilustrar lo anterior:

1. Intervalo $[-1, 2]$, es el que tenemos representado en el dibujo anterior. En este caso hemos considerado que tanto el -1 como el 2 están dentro del intervalo.

2. Intervalo $[-1, 2)$, igual que antes pero en este caso el 2 no esta en el intervalo, es decir, son todos los números comprendidos entre el -1 (inclusive) hasta el 2 (sin incluir).

3. Intervalo (-1, 2] , es el mismo que antes pero en este caso el número que no está dentro del intervalo es el -1.

4. Intervalo (- 1, 2) , en este caso ninguno de los dos extremos están incluidos en el intervalo, es decir, son todos los números desde el -1 al 2 pero sin incluir ninguno de ellos.

Tipo de Intervalo	Notación de Intervalo	Notación de desigualdad	Grafica Lineal
INTERVALO ABIERTO	(a, b)	$(a < x < b)$	
INTERVALO CERRADO	$[a, b]$	$[a \leq x \leq b]$	
INTERVALO SEMI-ABIERTO POR LA IZQUIERDA	$(a, b]$	$(a < x \leq b]$	
INTERVALO SEMI-ABIERTO POR LA DERECHA	$[a, b)$	$[a \leq x < b)$	

1.6. Resumen de todos los números

- Los números naturales son aquellos que no tienen ni signo ni parte decimal

  N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}

- Los números enteros tienen signo (excepto el cero) pero no tienen decimales

  Z = {…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ….}

  - Los naturales equivalen a los enteros positivos. Así, por ejemplo, el número natural 2 es el mismo número que el número entero +2. Por tanto, si un número es natural, también es un número entero.
  - No todos los números enteros son naturales, puesto que si tienen signo negativo, no tienen equivalente natural. Así por ejemplo, los enteros +2 y 0 son también naturales (equivalen a 2 y 0), pero el -2 no sería natural.

- Los números racionales son las fracciones.
  - Los números naturales son todos racionales, puesto que se pueden escribir en forma de fracción (con denominador uno por ejemplo).

    $$2 = \frac{1}{2}$$

  - Los números enteros son todos racionales, puesto que se pueden escribir en forma de fracción (con denominador uno por ejemplo).

    $$-2 = \frac{1}{-2}$$

  - No todos los números racionales son enteros o naturales. Si al hacer la división que representa la fracción el resultado da cifras decimales, no es entero ni natural. En ese caso, hay tres posibilidades:
    - Que el número sea decimal (cuando hay un número limitado de decimales)

      $$\frac{1}{2} = 0'5$$

    - Que sea decimal periódico puro (cuando hay infinitos decimales y se repiten a partir de la coma)

      $$\frac{1}{3} = 0'33333 \ldots$$

    - Que sea decimal periódico mixto (cuando hay infinitos decimales, y hay algún decimal junto a la coma que no se repite y los demás sí se repiten)

      $$\frac{29}{22} = 1'318181818 \ldots$$

- Los números irracionales tienen infinitos decimales que no se repiten. Son irracionales el número pi, el número e y algunas raíces.
  - Un número es racional o irracional, una de las dos cosas, pero solo una de las dos.

- Todos los números naturales, enteros, racionales e irracionales son números reales.

Tema 1. Ejercicios

1. Calcula el mcm de:

   a) 24 y 36
   b) 12 y 8
   c) 4, 9 y 36

2. Calcula el opuesto y valor absoluto de los siguientes números:

   a) +7
   b) -4

3. Escribe V o F a continuación de cada apartado para decir si son o no ciertas las siguientes desigualdades:

1) + 6 < + 12

2) + 10 > -10

3) 0 < -1

4) +7 < -8

5) +24 > +35

6) +19 < +22

7) -12 > -14

8) -6 < 0

9) +2 > -3

4. Escribe debajo de cada apartado V o F para decir si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:
a) 12 - 5 = 7 b) 12 - (-5) = -7 c) -12 - 5 = -17 d) -12 - (-5) = -7

5. Resuelve las siguientes operaciones:
a) 7•5-4•3-10•2 =
b) 2+3•(5+30-20) =
c) 21+3•(5-9)-8=
d) 15-7•(-4+2)+2•1=
e) 3•(-4)+5•(1-2) =
f) 4•(-5)+(3•5•4) =
g) 4:2+9:3 =
h) (8•5+10):5 =
i) (9•5+45): (-4+(-2•3)) =
j) 50:(4•5+5) =
k) 22:(10•5-61) =
l) (45-15):(-2) =

6. Escribe V o F a continuación de la siguiente afirmación para decir si es verdadera o falsa: De una finca de 24 ha se vende la tercera parte a razón de 2 euros el m2 y el resto a 20 euros el área. Por la venta se obtienen 180.000 euros.

7. Un constructor compra una parcela de 5 hectáreas que le cuesta 2.500.000 €. Se gasta 1.200.000 € en urbanizarla y pierde 1 hectárea entre calles y aceras. El terreno que le queda lo divide en 25 parcelas. Si quiere ganar 2.300.000 €, ¿a qué precio tiene que vender el metro cuadrado de parcela?

8. Realiza los siguientes ejercicios aplicando propiedades de potencias:

a) $2^0 =$
b) $(-2)^{-3} \cdot (-2)^{-5} =$
c) $5^3 : 5^{-5} =$
d) $[(-3)^{-2}]^7 =$

9. Escribe a la derecha el resultado:

a) 3/4 de 60

b) 4/7 de 35

c) 2/3 de 27

10. Indica si las siguientes fracciones son propias o impropias:
a) 4/6
b) 7/5

11. Escribe V o F a continuación de cada apartado para decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) De un rollo de alambre de 60 m se han cortado 3/4 .El trozo restante mide 15 m.

b) Los 4/5 de un queso cuestan 20 euros. El queso completo vale 30 euros.

c) Una epidemia ocasiona la muerte de 1/3 de las gallinas de una granja. Si se salvaron 618 gallinas, en la granja había 820 gallinas antes de la epidemia.

d) Compré los 3/5 del vino de un barril, y un amigo compró el resto. Si mi amigo pagó 240 euros, yo pagué 350 euros.

e) Hemos llenado 2/3del depósito con 36 litros de gasolina. El depósito tiene una capacidad total de 54 litros.

f) Se han consumido los 5/6 de una caja de 30 bombones. En la caja quedan ahora 6 bombones.